بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی (۳)

کلیهٔ رشته‌های شاخهٔ فنی و حرفه‌ای

گروه صنعت

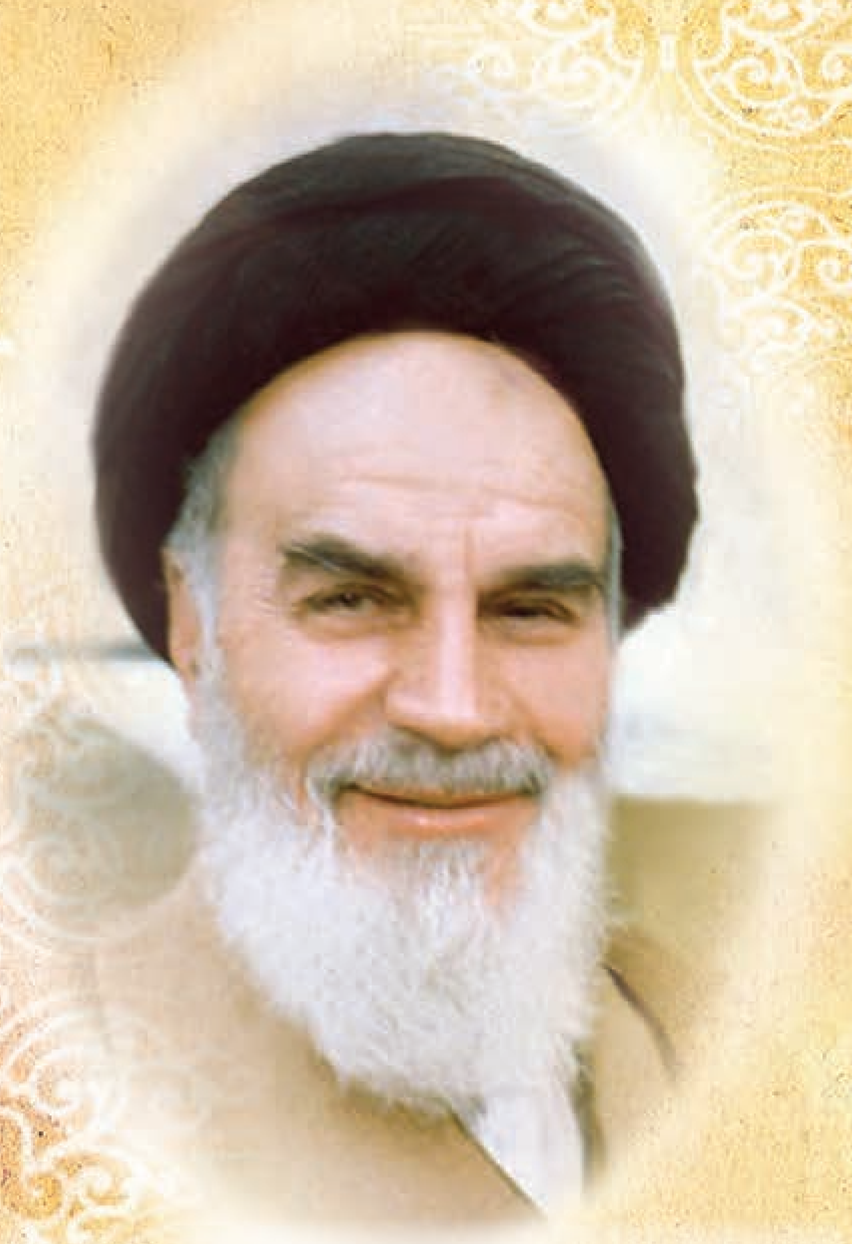
پایهٔ دوازدهم دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی (۳) ـ ۲۱۲۱۴۱
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی فنی و حرفه‌ای وکاردانش
شناسه افزوده برنامه‌ریزی وتألیف: افشار بهمنی، زیبا فانی، مالک مختاری، شهرناز بخشعلی‌زاده، ناصر بروجردیان، احمدرضا حقیقی، زین‌العابدین دهقانی ابیانه (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
امیرحسین آشنا، ناصر بروجردیان، شهرناز بخشعلی‌زاده، زین‌العابدین دهقانی ابیانه، زیبا فانی، نرگس یافتیان (اعضای گروه تألیف) ـ عزت‌الله خیرالله (ویراستار ادبی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: جواد صفری (مدیر هنری) ـ ابوالحسن محمدگنجی (صفحه‌آرا) ـ صبا کاظمی‌دوانی (طراح جلد) ـ مریم دهقان‌زاده (رسام)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهیدموسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶ ، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وب‌گاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر : شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران: تهران ـ کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش)
تلفن :۵ ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ ششم ۱۴۰۲

کلیه حقوق مادی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیه فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

شابک ۷ – ۳۰۵۹ – ۰۵ – ۹۶۴ – ۹۷۸ **ISBN 978 – 964 – 05 – 3059–7**



ملت شریف ما اگر در این انقلاب بخواهد پیروز شود باید دست از آستین برآرد و به کار بپردازد. از متن دانشگاه‌ها تا بازارها و کارخانه‌ها و مزارع و باغستان‌ها تا آنجا که خودکفا شود و روی پای خود بایستد.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست

سخنی با هنرجویان گرامی

به گفتهٔ بسیاری از دانشمندان، ریاضی علمی شیرین و کاربردی است و تاریخ ریاضی نشان داده که حل مسائل عملی محیط پیرامونی موجب توسعهٔ ریاضیات شده است. هدف اصلی ریاضی، حل مسائلی است که انسان در زندگی روزمره و عملی با آنها روبه‌رو است.

شما با دیدن شنای شناگران، نمی‌توانید شنا یاد بگیرید بلکه برای شناگر شدن باید وارد آب شوید و خودتان مستقیماً عمل کنید.

یادگیری ریاضی صرفاً خواندن و شنیدن مفاهیم ریاضی نیست؛ بلکه ریاضیات علمی معنادار است و تا زمانی که خود شما درگیر حل مسائل نشوید نمی‌توانید ریاضی را یاد گرفته و از آن استفاده کنید.

طراحی این کتاب به‌گونه‌ای است که در یک متن داستان‌گونه، مسئله‌ای مطرح می‌شود و شما با انجام فعالیت‌هایی که در ادامهٔ مسئله آمده است به مفهوم ریاضی مورد نظر می‌رسید.

سعی کنید تمامی این عملیات را انجام دهید و مطمئن باشید خواهید توانست مفاهیم را به خوبی یاد گرفته و نهایتاً مسئله‌های کتاب را حل کنید.

مفاهیم ریاضی در این کتاب در ارتباط با هم بوده و به هم وابسته‌اند. سعی شده است مثال‌ها و تمرین‌هایی که در کتاب آمده است کاربردی بوده و با محیط پیرامونی زندگی ما مرتبط باشند.

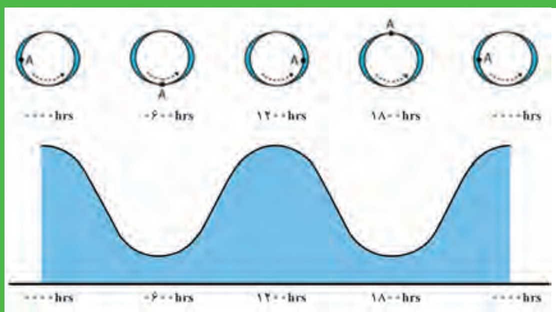
آنچه که مسلم است ریاضیات زبان علم است و در تمام متن زندگی ما حضور دارد. یادگیری ریاضی شما را قادر می‌سازد تا توانایی تجزیه و تحلیل مسئله‌هایی را که با آنها برخورد می‌کنید، داشته باشید و خواهید دید که چگونه می‌توانید آموخته‌های خود را به کار برده و مسئله‌های مهمی را حل کنید.

در این کتاب علاوه بر تأکید بر این جنبهٔ ریاضی، به تأثیر فناوری در یادگیری ریاضی نیز توجه شده است. محیط و ابزار فناوری از جمله استفاده از ماشین حساب و نرم‌افزارهای پویا مانند جئوجبرا، این امکان را فراهم می‌سازد تا هنرجو فرصت درک شهودی، رشد مهارت‌های تفکر مانند حدسیه و فرضیه‌سازی، الگویابی و غیره را پیدا کند. بنابراین به‌کارگیری فناوری از اصولی است که در تألیف این کتاب به آن توجه شده است.

در خاتمه برای آنکه کتاب برای شما بهتر قابل استفاده باشد، از نظر برخی از هنرآموزان محترم استفاده شده است که بدین وسیله از ایشان تشکر و قدردانی می‌گردد.

پودمان اول

کاربرد برخی تابع‌ها در زندگی روزمره



مطالعهٔ پدیده‌های دوره‌ای به‌دلیل تأثیر زیاد آنها در زندگی روزمره از اهمیت زیادی برخوردار است. مدل‌سازی این‌گونه پدیده‌ها به کمک تابع‌های مثلثاتی انجام می‌شود. طلوع و غروب خورشید، تغییر فصل‌ها، جزر و مد، حرکت چرخ و فلک و تغییر ارتفاع یک سرنشین آن، نمونه‌هایی از این پدیده‌ها می‌باشد.

بررسی جزر و مد و تغییرات ناشی از آن از مؤلفه‌های اصلی مطالعهٔ الگوی نوسانات تراز آب، تغییرات خط ساحلی، آب گرفتگی سواحل و مدیریت نوار ساحلی می‌باشد. امروزه با احداث نیروگاه‌های جزر و مدی در برخی از نقاط، از انرژی جزر و مد برای تولید برق استفاده می‌شود این انرژی حاصل نیروهای جاذبهٔ ماه و خورشید و از انرژی‌های تجدیدپذیر می‌باشد.

۱ـ تابع‌های چندضابطه‌ای

احمد می‌دانست هزینهٔ گاز مصرفی خانه، تابعی از میزان مصرف گاز است. او می‌خواست قانون این تابع را به‌دست آورد، اما با مشکلی روبه‌رو شد که در کلاس آن را مطرح کرد.

احمد گفت: من فکر می‌کردم که هزینهٔ مصرف گاز تابعی از میزان مصرف گاز است. اما شنیدم که دولت برای صرفه‌جویی در مصرف آب، برق و گاز، هزینهٔ مصرف آن را با یک قانون ثابت اندازه‌گیری نمی‌کند. مثلاً، تا یک میزان از مصرف گاز، آن را مجانی حساب می‌کند و تا یک میزان دیگر از مصرف، آن را با تعرفه کم حساب می‌کند و مصارف بالا را با تعرفه‌های زیاد حساب می‌کند. وقتی قانون ثابتی برای محاسبهٔ هزینهٔ گاز نباشد، آیا باز هم می‌توانیم بگوییم هزینهٔ گاز، تابعی از میزان مصرف گاز است؟

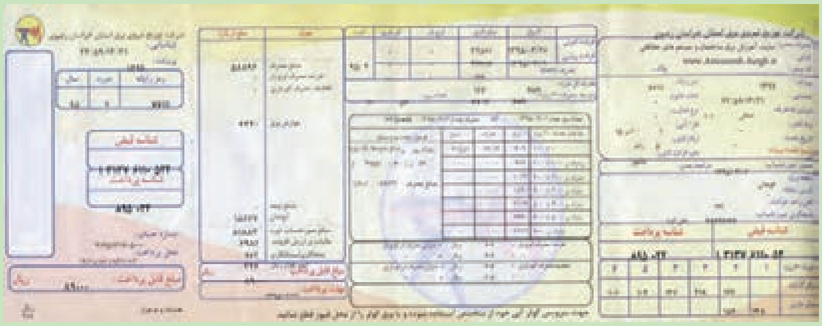
دبیر گفت: آیا با مشخص شدن میزان مصرف گاز، می‌توان هزینهٔ گاز را به‌طور مشخص به‌دست آورد؟

احمد گفت: حتماً می‌توان این کار را کرد، چون دولت هزینهٔ مصرف گاز را حساب می‌کند و قبض آن را به خانه‌ها می‌فرستد. پس، هزینهٔ گاز، تابعی از میزان مصرف گاز است. اما برای محاسبهٔ هزینهٔ گاز، قانون یکسانی را نمی‌توانیم به‌کار ببریم. آیا این موضوع مشکلی ایجاد می‌کند؟

دبیر گفت: خیر، قانون یک تابع به معنای مشخص بودن روش محاسبهٔ مقدار تابع است، نه اینکه حتماً فرمول ثابتی در کار باشد. ممکن است شیوهٔ محاسبهٔ مقدار تابع برای مقادیر مختلف فرق کند. فعالیت صفحهٔ بعد کمک می‌کند که شیوهٔ محاسبهٔ مقدار تابع هزینهٔ برق را مشخص کنید.

فعالیت ۱

واحد مصرف برق کیلو وات ساعت[۱] است. یکی از مهندسان شرکت برق برای هدفمندکردن الگوی مصرف برق، طرحی پیشنهاد کرد. براساس این طرح، مصرف کمتر از ۱۰ کیلو وات ساعت در ماه مجانی است و برای مصارف از ۱۰ تا کمتر از ۱۰۰ کیلو وات ساعت، به ازای هر کیلو وات ساعت ۵۰ تومان هزینه حساب می‌شود. همچنین برای مصارف از ۱۰۰ تا ۵۰۰ کیلو وات ساعت، به ازای هر کیلو وات ساعت ۱۲۰ تومان محاسبه می‌گردد و بیشتر از ۵۰۰ کیلو وات ساعت برق منزل قطع می‌شود.



۱ فرض کنید f، تابعی باشد که طبق قانون آن هزینهٔ مصرفی براساس این طرح محاسبه می‌شود. دامنهٔ این تابع را مشخص کنید.

۲ جدول زیر را که رابطهٔ بین برخی از مقادیر میزان مصرف برق و هزینهٔ آن را نشان می‌دهد، کامل کنید.

مصرف برق در ماه (کیلو وات ساعت)	۰	۵	۱۰	۷۰	۱۰۰	۲۰۰	۵۰۰
هزینهٔ برق مصرفی (تومان)	۰				۱۲۰۰۰		

۳ اگر میزان مصرف برق در یک ماه را با x نشان دهیم، در هر یک از حالت‌های زیر، قانون (یا ضابطهٔ) $f(x)$ را مشخص کنید.

الف) ۰≤ x <۱۰

ب) ۱۰≤ x <۱۰۰

پ) ۱۰۰≤ x ≤۵۰۰

۴ f(۳۷) و f(۱۲۰) هر یک چه معنایی دارند؟ مقادیر آنها را بیابید.

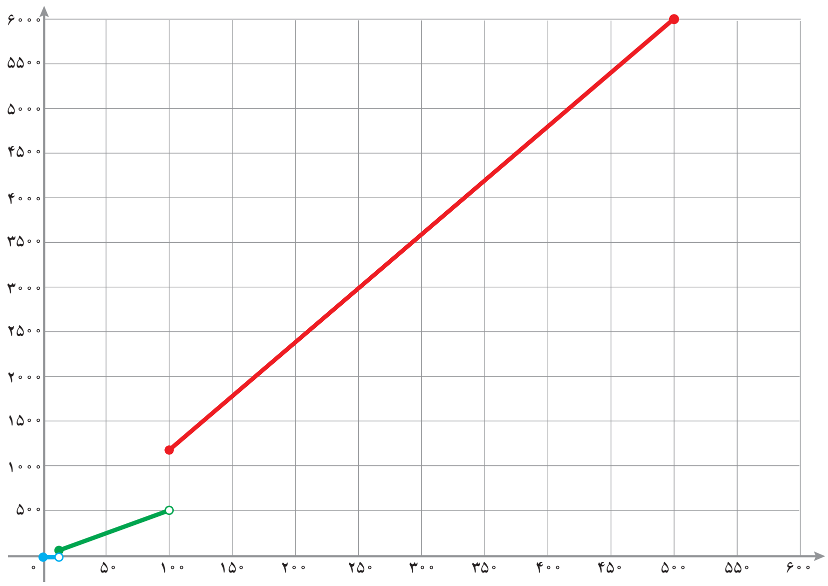
۱ـ یک کیلو وات‌ساعت (kwh) در واقع مقدارمصرف یک وسیلهٔ برقی ۱۰۰۰ واتی در مدت زمان یک ساعت است. برای مثال، اگر ۱۰ عدد لامپ ۱۰۰ وات را به مدت یک ساعت روشن کنیم، یک کیلو وات ساعت برق مصرف کرده‌ایم.

در این فعالیت تابعی را بررسی کردیم که روی بازه‌های مختلف، قانون‌های مختلفی داشت. برای یافتن مقدار این تابع در یک نقطه، ابتدا باید مشخص شود که آن نقطه در چه بازه‌ای قرار دارد. برای رسم نمودار این تابع باید نمودار آن را در بازه‌های مختلف با توجه به قانون آن بازه رسم کنیم و این نمودارها را با هم در نظر بگیریم.

اگر دامنهٔ تابعی از چند بازهٔ جدا از هم تشکیل شده باشد و روی هر کدام از این بازه‌ها قانون جداگانه‌ای استفاده شده باشد، برای نوشتن قانون این تابع، هر کدام از این بازه‌ها را جداگانه می‌نویسیم و قانون تابع در آن بازه را روبه‌روی آن می‌نویسیم. برای مثال قانون تابع f در فعالیت (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم.

$$f(x)=\begin{cases} ۰ & ۰\leq x<۱۰ \\ ۵۰x & ۱۰\leq x<۱۰۰ \\ ۱۲۰x & ۱۰۰\leq x\leq ۵۰۰ \end{cases}$$

این شیوهٔ تعریف، نشان می‌دهد که به ازای هر مقدار x در بازهٔ $[۰,۵۰۰]$ مقدار تابع در x تعریف می‌شود. پس، دامنهٔ این تابع بازهٔ $[۰,۵۰۰]$ است. نمودار این تابع به شکل زیر است:



تابعی که مانند تابع فعالیت بالا باشد، **تابع چندضابطه‌ای** می‌نامند، زیرا ضابطه یا قانون آن در بازه‌های مختلف، متفاوت است.

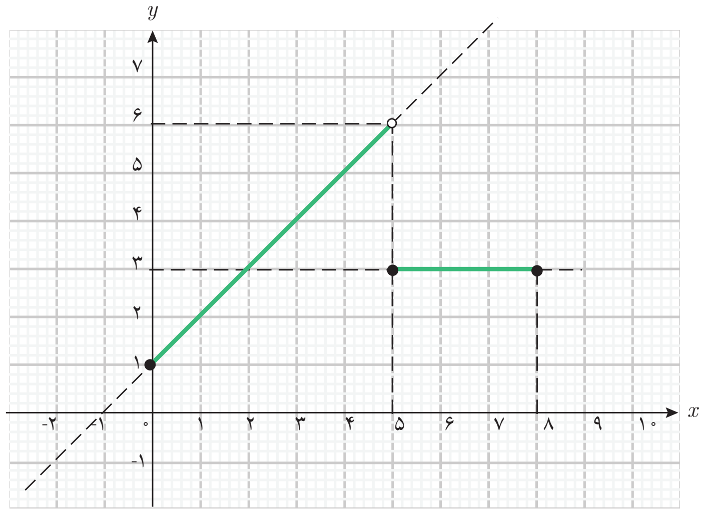
برای رسم نمودار تابع‌های چند ضابطه‌ای، نمودار آنها را در بازه‌های مشخص‌شده رسم می‌کنیم و نمودارهای به‌دست آمده را هم‌زمان با هم در نظر می‌گیریم.

مثال ۱

تابع g با دامنهٔ $[۰,۸]$ را به‌صورت زیر درنظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

$$g(x)=\begin{cases} x+۱ & ۰\leq x<۵ \\ ۳ & ۵\leq x\leq ۸ \end{cases}$$

ابتدا نمودار تابع $x+۱$ را در دامنهٔ $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم، سپس قسمتی از آن را که در بازهٔ $[۰,۵)$ قرار دارد، در نظر می‌گیریم. همچنین نمودار تابع $g(x)=۳$ (تابع ثابت) را در دامنهٔ $\mathbb{R}$ رسم می‌کنیم و قسمتی از آن را که در بازهٔ $[۵,۸]$ قرار دارد، در نظر می‌گیریم.

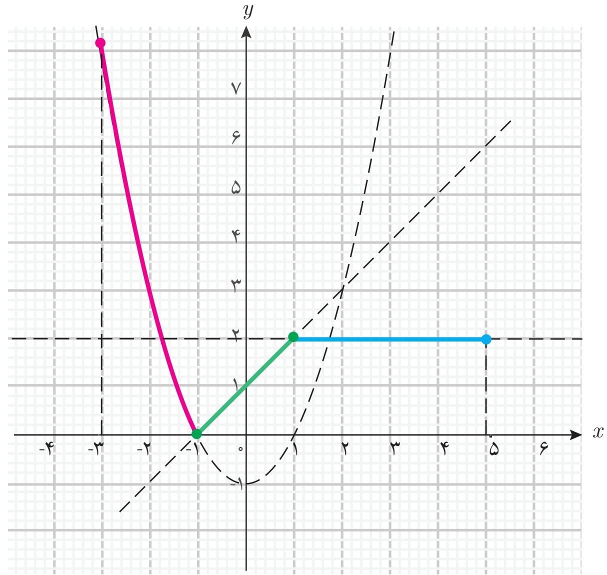


مثال ۲

تابع f با دامنهٔ $[-۳,۵]$ را به‌صورت زیر در نظر بگیرید و نمودار آن را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & -۳\leq x<-۱ \\ x+۱ & -۱\leq x\leq ۱ \\ ۲ & ۱<x\leq ۵ \end{cases}$$

در بازه $[-۳,-۱)$، قانون تابع به‌صورت $f(x)=x^۲-۱$ است. نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم، برای

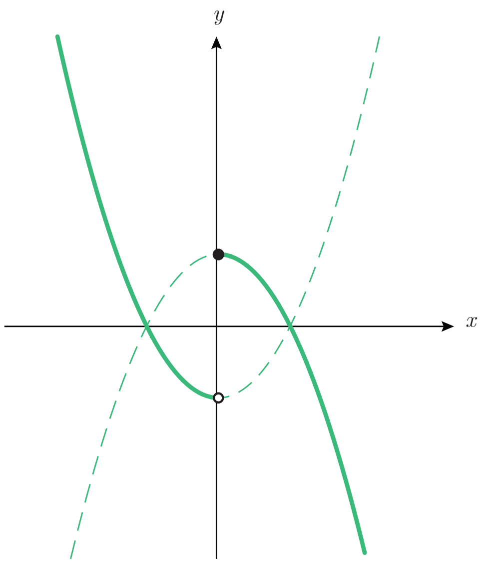


این منظور می‌توان نمودار تابع $y=x^2$ را در $\mathbb{R}$ رسم کرد، یک واحد به پایین انتقال داد و سپس بخشی از نمودار را که در بازهٔ $[-3,-1)$ است در نظر گرفت. در بازهٔ $[-1,1]$، قانون تابع، به‌صورت $f(x)=x+1$ است و نمودار آن، قسمتی از یک خط است که آن را در این بازه رسم می‌کنیم. در بازهٔ $(1,5]$، قانون تابع به‌صورت $f(x)=2$ (تابع ثابت) است. نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. برای یافتن نقاط ابتدایی و انتهایی نمودار می‌توان مقدار تابع را در این نقاط محاسبه کرد.

مثال ۳

نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$g(x)=\begin{cases} x^2-1 & x<0 \\ -x^2+1 & 0\leq x \end{cases}$$



دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}$ است. قانون این تابع، روی بازهٔ $(-\infty,0)$ به‌صورت $g(x)=x^2-1$ است. نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم. قانون این تابع، روی بازه $[0,+\infty)$ به‌صورت $g(x)=-x^2+1$ است.نمودار آن را در این بازه رسم می‌کنیم.

کار در کلاس ۱

۱ تابع با قانون
$$f(x)=\begin{cases} x+1 & -2\leq x<1 \\ 3 & 1\leq x<4 \\ -x+2 & 4\leq x\leq 7 \end{cases}$$
را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ تابع f را بنویسید.

ب) مقادیر $f(-1)$، $f(1)$، $f(2)$، $f(4)$ و $f(5)$ را تعیین کنید.

پ) نمودار f را رسم کنید.

۲ فرض کنید در محاسبهٔ هزینهٔ گاز مصرفی خانگی، طبق دستورالعمل زیر عمل شود. دامنه و قانون تابعی که هزینهٔ گاز مصرفی را بیان می‌کند، به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.

۱ـ مصرف حداکثر تا حجم ۵ متر مکعب، مجانی است.

۲ـ مصرف حداکثر تا ۵۰ متر مکعب، ۵ مترمکعب آن مجانی و بقیه هر مترمکعب ۲۰۰ تومان است.

۳ـ مصرف حداکثر تا ۱۰۰ متر مکعب، تا ۵۰ متر مکعب آن طبق قانون قبلی و بقیهٔ آن هر متر مکعب ۳۰۰ تومان است.

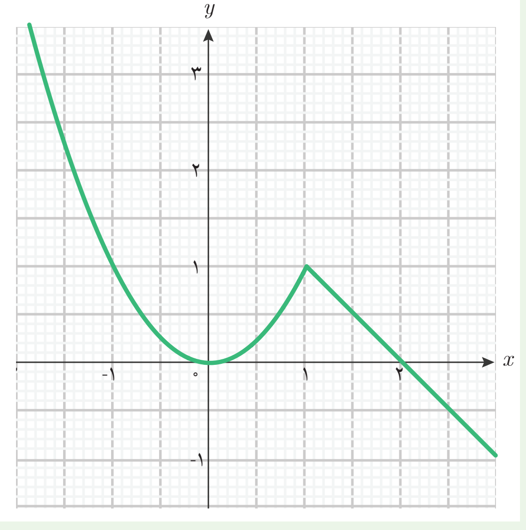
۴ـ مصرف بیش از ۱۰۰ متر مکعب، گاز قطع می‌شود.

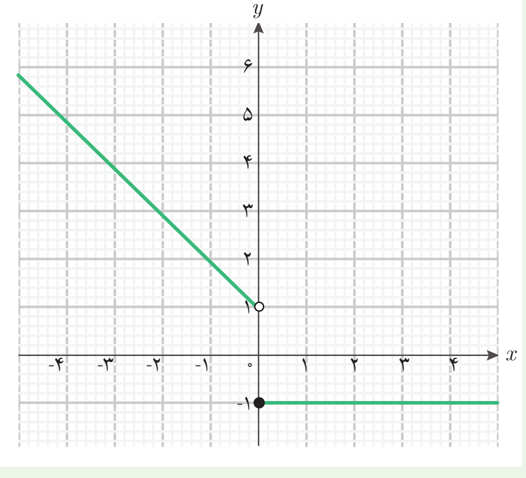
مسائل

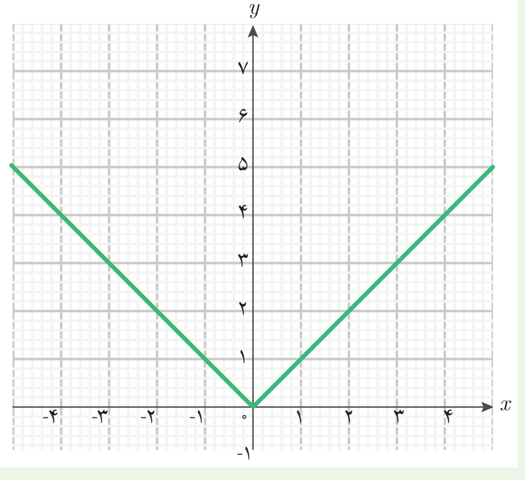
۱ در زیر چهار تابع و سه نمودار داده شده است. مشخص کنید که هر نمودار مربوط به کدام تابع است؟

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+x+۱ & x<۲ \\ -x+۱ & ۲\leq x \end{cases} \qquad g(x)=\begin{cases} -x+۱ & x<۰ \\ -۱ & ۰\leq x \end{cases}$$

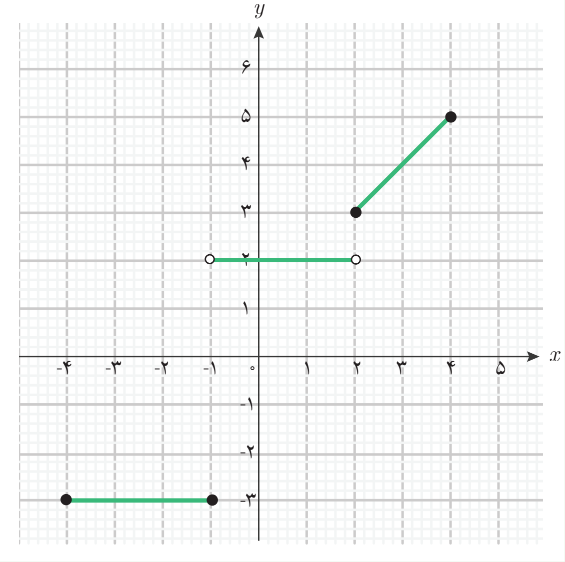
$$h(x)=\begin{cases} -x & x<۰ \\ x & ۰\leq x \end{cases} \qquad k(x)=\begin{cases} x^۲ & x<۱ \\ -x+۲ & ۱\leq x \end{cases}$$







۲ نمودار زیر نمایش یک تابع چند ضابطه‌ای است. دامنه و قانون آن را بنویسید.



۳ تابع با قانون $g(x)=\begin{cases} -x^۲ & -۳\leq x<۱ \\ -۲ & x=۱ \\ -x+۳ & ۱<x\leq ۵ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ تابع g را بنویسید.

ب) مقادیر $g(-۲)$، $g(۱)$ و $g(۳)$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار تابع g را رسم کنید.

۴ نمودار تابع چند ضابطه‌ای زیر را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲-۱ & x\leq -۱ \\ ۱-x^۲ & -۱<x<۱ \\ x^۲-۱ & ۱\leq x \end{cases}$$

۵ گردشگری در شیراز برای خرید چند کارت پستال به مغازه رفت و تصمیم گرفت از یک نوع کارت، تعدادی خریداری کند. از این نوع کارت، ۴۰ عدد موجود بود. این کارت‌ها طبق جدول زیر فروخته می‌شد.

خرید	هزینه
خرید حداکثر تا ۱۰ کارت	هر کارت ۳ هزار تومان
خرید بیش از ۱۰ کارت تا حداکثر ۲۰ کارت	۱۰ کارت اول مطابق قانون قبلی و مازاد بر ۱۰ کارت، هر کارت ۲ هزار تومان
خرید بیش از ۲۰ کارت	۲۰ کارت اول مطابق قانون قبلی و مازاد بر ۲۰ کارت، هر کارت ۱ هزار تومان

هزینهٔ پرداخت‌شده توسط گردشگر، تابعی از تعداد کارت‌های خریداری شده است.
اگر x تعداد کارت‌هایی باشد که این گردشگر خریداری می‌کند، دامنه و قانون این تابع را به‌دست آورید.

الف) نمودار آن را رسم کنید.

ب) هزینهٔ خرید ۱۴ کارت چقدر است؟

پ) هزینهٔ خرید ۲۳ کارت چقدر است؟

۶ برخی بیماران مبتلا به دیابت، برای کنترل قند خون، از انسولین استفاده می‌کنند. سه ساعت پس از دریافت دارو، تأثیر انسولین روی قند خون به حداکثر می‌رسد. پس از این زمان، این تأثیرگذاری تا پنج ساعت تقریباً ثابت می‌ماند، سپس کاهش پیدا می‌کند و تا هنگام نوبت تزریق بعدی ثابت می‌ماند.

سطح انسولین در یک بیمار را می‌توان با تابع زیر مدل‌سازی کرد. در اینجا، $f(t)$ نشان‌دهندهٔ سطح انسولین t ساعت پس از تزریق انسولین است.

$$f(t)=\begin{cases} ۴۰t+۱۰۰ & ۰\leq t\leq ۳ \\ ۲۲۰ & ۳<t\leq ۸ \\ -۸۰t+۸۶۰ & ۸<t\leq ۱۰ \\ ۶۰ & ۱۰<t\leq ۲۴ \end{cases}$$

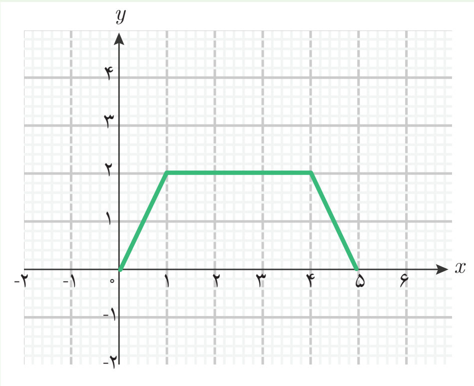
اگر بیمار، انسولین را در ساعت ۷ صبح دریافت کند، سطح انسولین خون او را در هر یک از زمان‌های زیر پیدا کنید.

الف) ۸ صبح ب)۱۱ صبح

پ)۴ بعدازظهر ت)۶ بعدازظهر

۷ تابعی دو ضابطه‌ای با دامنهٔ [۲,۲-] مثال بزنید که نمودار آن از دو پاره‌خط تشکیل شده باشد.

۸ وضعیتی در زندگی روزمره را به‌صورت تابعی سه ضابطه‌ای توصیف کنید که نمودار آن به‌صورت روبه‌رو باشد.



۹ دولت هزینهٔ مصرف برق خانگی مناطق مختلف کشور را متفاوت محاسبه می‌کند. با استفاده از اطلاعات منطقه‌ای از کشور که در آن زندگی می‌کنید، تابعی معرفی کنید که هزینهٔ مصرف برق برحسب میزان مصرف برق در ماه را درمنطقهٔ شما بیان کند. سپس نمودار آن را رسم کنید.

۲ــ تابع‌های مثلثاتی

مجید در فکر حرکت چرخ‌وفلک شهر بازی پارسال بود. او یاد گرفته بود که چگونه طول مسیر طی‌شده توسط یکی از کابین‌های چرخ‌وفلک را برحسب زاویهٔ چرخش محاسبه کند، اما می‌خواست بداند که چگونه می‌تواند ارتفاع کابین را در هر لحظه از سطح زمین محاسبه کند. او با خود گفت: وقتی زاویهٔ چرخش کابین مشخص باشد، موقعیت کابین کاملاً مشخص است؛ پس ارتفاع آن از سطح زمین نیز مشخص می‌شود. بنابراین می‌توان ارتفاع کابین را برحسب زاویهٔ چرخش به‌دست آورد.

مجید فکر خود را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد و در مورد درستی آن پرسید.

دبیر گفت: بله، حتماً می‌توان ارتفاع کابین از سطح زمین را برحسب زاویهٔ چرخش کابین به‌دست آورد.

سعید گفت: در این صورت، آیا می‌توانیم نتیجه بگیریم، ارتفاع کابین از سطح زمین، تابعی از زاویهٔ چرخش آن است؟

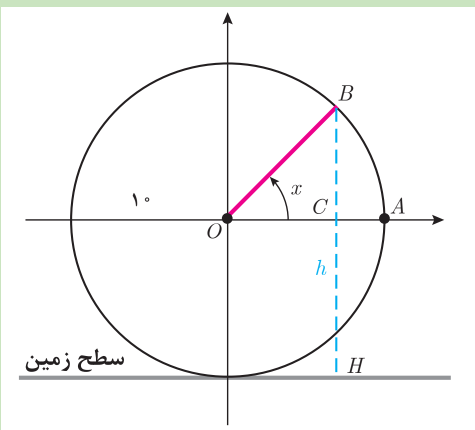
دبیر گفت: بله، اگر به تعریف تابع دقت کنیم، وقتی می‌گوییم کمیت (ب) تابعی از کمیت (الف) است، یعنی با مشخص‌شدن مقداری برای کمیت (الف)، مقدار کمیت (ب) نیز دقیقاً مشخص می‌شود. چون با مشخص شدن زاویهٔ چرخش کابین، ارتفاع آن نیز دقیقاً مشخص می‌شود، می‌توانیم بگوییم که ارتفاع کابین از سطح زمین تابعی از زاویهٔ چرخش آن است.

سعید گفت: ولی قانون این تابع و دامنهٔ آن چیست؟

دبیر گفت: برای به‌دست آوردن قانون این تابع، انجام فعالیت زیر می‌تواند به شما کمک کند.

فعالیت ۲

فرض کنید شعاع دایرهٔ چرخ‌وفلکی ۱۰ متر باشد. برای سادگی محاسبه، نقطهٔ شروع حرکت کابین را در ارتفاع ۱۰ متری از سطح زمین طبق شکل روبه‌رو در نظر بگیرید (نقطه A). مقدار زاویهٔ چرخش برحسب رادیان را با x و ارتفاع کابین از سطح زمین برحسب متر را با h نشان دهید.

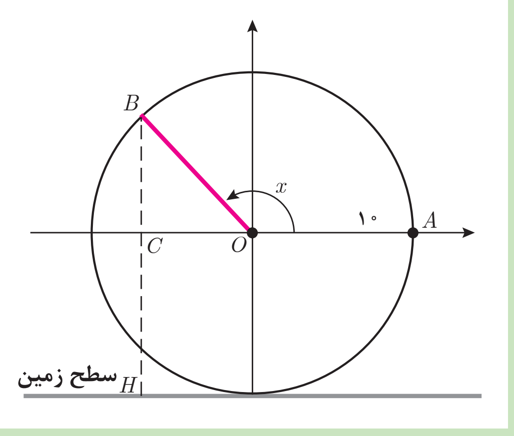


۱ ارتفاع کابین را وقتی زاویهٔ چرخش صفر است، پیدا کنید.

۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCB طول پاره‌خط BC را برحسب $\sin x$ بنویسید.

۳ قانون تابعی که h را برحسب زاویهٔ تند x بیان می‌کند، بنویسید.

۴ یک زاویهٔ باز دلخواه مانند x در شکل زیر در نظر بگیرید و درستی رابطهٔ بین x و h را که در بند (۳) به‌دست آوردید، در این حالت بررسی کنید.



در فعالیت (۲) دیده می‌شود که ارتفاع کابین برحسب زاویهٔ چرخش، در حالتی که نقطهٔ متناظر زاویهٔ چرخش در ربع اول و دوم قرار داشته باشد، به‌صورت $h=۱۰+۱۰\sin x$ است. برای سایر زاویه‌های چرخش (ربع سوم و چهارم) نیز می‌توان نشان داد که این تساوی برقرار است.

اگر چرخ‌وفلک بیش از یک دور در جهت مثبت یا در جهت منفی بچرخد، باز هم رابطهٔ بین x و h به همین صورت برقرار است، زیرا نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه فقط به مکان نقطهٔ متناظر آن روی دایره بستگی دارد.

گفتگو

سعید گفت: پس، تابع با قانون $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$، ارتفاع کابین چرخ و فلک را برحسب زاویهٔ چرخش آن به‌دست می‌دهد. اما دامنهٔ این تابع چیست؟

دبیر گفت: دامنهٔ این تابع بستگی به آن دارد که این کابین از شروع تا پایان حرکت چند دور می‌زند. برای مثال، اگر چرخ‌وفلک ۳ دور بزند، زاویه‌های چرخش (برحسب رادیان) از صفر تا $۳\times۲\pi$ خواهند بود و دامنهٔ این تابع، بازهٔ $[۰,۶\pi]$ است.

برای اشاره به تابع‌هایی که متغیر آنها زاویه است و در قانون آنها از نسبت‌های مثلثاتی آن زاویه استفاده می‌شود، معمولاً از اصطلاح **تابع‌های مثلثاتی** استفاده می‌شود. طبق قرارداد، در تابع‌های مثلثاتی، متغیر (زاویه) همواره برحسب **رادیان** در نظر گرفته می‌شود.

مثال ۴

تابع مثلثاتی $f(x)=\sin x+\cos x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، را در نظر بگیرید و مقادیر $f(۱)$ و $f(-۳)$ و $f(\frac{\pi}{۶})$ را به‌دست آورید.

مقادیر x برحسب رادیان هستند. در محاسبهٔ $f(۱)$ مقدار $x=۱$ نشان‌دهندهٔ زاویهٔ ۱ رادیان است. به کمک ماشین حساب نتیجه می‌شود:

$$f(۱)=\sin ۱+\cos ۱\approx ۱/۳۸$$

همچنین در محاسبهٔ $f(-۳)$ مقدار $x=-۳$ نشان‌دهندهٔ زاویهٔ ۳- رادیان است. به کمک ماشین حساب نتیجه می‌شود:

$$f(-۳)=\sin(-۳)+\cos(-۳)=-\sin(۳)+\cos(۳)\approx -۱/۱۳$$

برای محاسبهٔ $f(\frac{\pi}{۶})$ داریم:

$$f(\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}+\cos\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۱+\sqrt{۳}}{۲}$$

کار در کلاس ۲

تابع $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ ارتفاع کابین چرخ‌وفلکی را برحسب زاویهٔ چرخش آن (x برحسب رادیان) نشان می‌دهد. این چرخ‌وفلک ۵ دور چرخیده است.

الف) دامنهٔ این تابع را بنویسید.

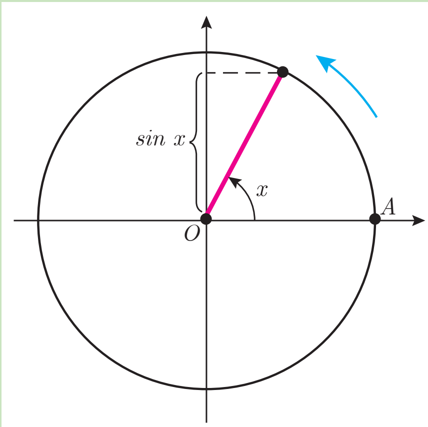
ب) $f(\frac{\pi}{۶})$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟ این مقدار را بیابید.

پ) به ازای چه زاویه‌هایی، کابین در پایین‌ترین نقطه قرار دارد؟

ت) $f(\frac{\pi}{۲})$ را بیابید. در این حالت، وضعیت کابین از لحاظ ارتفاع چگونه است؟

تابع با قانون $f(x)=\sin x$ یکی از ساده‌ترین تابع‌های مثلثاتی است. دامنهٔ این تابع می‌تواند هر بازه‌ای از اعداد حقیقی باشد، زیرا x زاویهٔ چرخش است و زاویهٔ چرخش، هر عدد حقیقی می‌تواند باشد. در فعالیت صفحهٔ بعد تغییرات مقادیر این تابع را در یک دامنهٔ داده شده، برحسب تغییرات متغیر x بررسی می‌کنیم.

فعالیت ۳



متحرکی را روی نقطهٔ A از دایرهٔ مثلثاتی زیر در نظر بگیرید که دایره را یک دور طی می‌کند.

۱ جملات زیر را کامل کنید (زاویهٔ چرخش را برحسب رادیان در نظر بگیرید).

الف) اگر زاویهٔ چرخش این متحرک را با x نشان دهیم، x از ......تا ...... تغییر می‌کند.

ب) وقتی x از صفر تا $\frac{\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

پ) وقتی x از $\frac{\pi}{۲}$ تا π افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

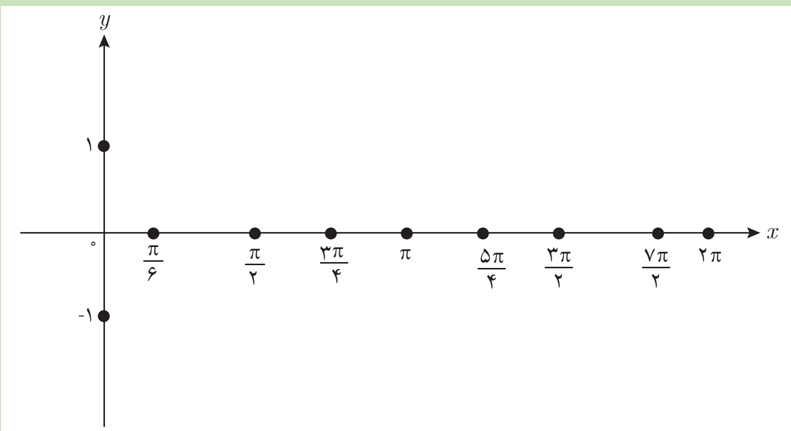
ت) وقتی x از π تا $\frac{۳\pi}{۲}$ افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

ث) وقتی x از $\frac{۳\pi}{۲}$ تا ۲π افزایش می‌یابد، $\sin x$ از .... تا .... (افزایش/ کاهش) می‌یابد.

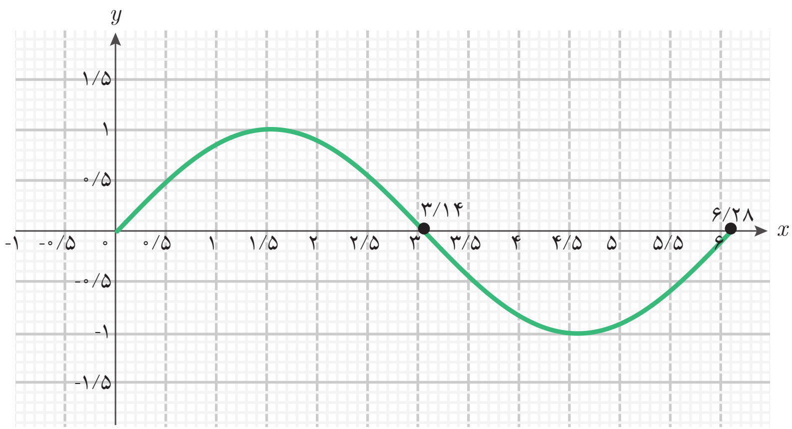
۲ با توجه به نتایج به‌دست آمده در بالا، جدول زیر را کامل کنید. افزایش یا کاهش مقادیر تابع را با فلش نمایش دهید (دو مورد در جدول مشخص شده است).

x	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
$\sin x$	↗		↘						

۳ با مشخص‌کردن نقاط جدول در دستگاه مختصات زیر، نمودار تابع با قانون $f(x)=\sin x$ را در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌طور تقریبی رسم کنید.



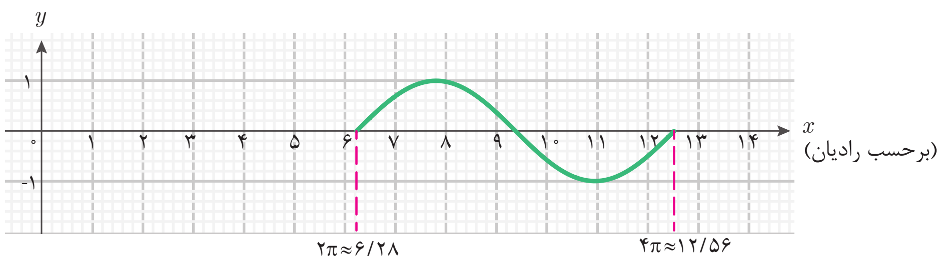
شکل زیر نمودار تابع $\sin x$ را با دامنهٔ $[\circ,۲\pi]$ نشان می‌دهد.



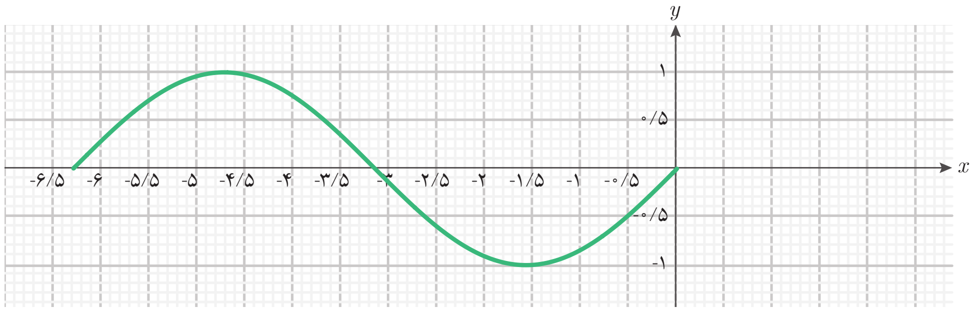
توجه داشته باشید که مقادیر x روی محور طول‌ها، اندازهٔ زاویه‌ها برحسب رادیان است. برای مثال، π **رادیان یعنی تقریباً ۳/۱۴ رادیان و ۲π رادیان تقریباً ۶/۲۸ رادیان** است؛ بنابراین دامنهٔ $[\circ,۲\pi]$ تقریباً همان $[\circ,۶/۲۸]$ است.

با ادامهٔ حرکت، پس از یک دور کامل روی دایرهٔ مثلثاتی، تغییرات سینوس زاویهٔ چرخش در بازهٔ $[۲\pi,۴\pi]$، همانند تغییرات آن در بازهٔ $[\circ,۲\pi]$ است. زیرا اگر به زاویه‌ای مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا از آن کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند. بنابراین، نمودار این تابع در بازه‌های دیگر، مانند ...، $[۴\pi,۶\pi]$، $[۲\pi,۴\pi]$، $[-۲\pi,\circ]$، ...، مشابه نمودار این تابع در بازهٔ $[\circ,۲\pi]$ است.

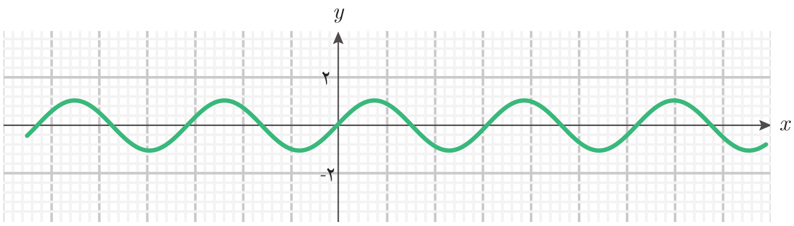
پس، برای رسم نمودار این تابع در بازه‌های دیگر، می‌توان نمودار بالا را به اندازهٔ مضارب صحیح $۲\pi\approx۶/۲۸$ به چپ یا راست منتقل کرد. برای مثال، نمودار $f(x) = \sin x$ در بازهٔ $[۲\pi,۴\pi]$ به‌صورت زیر است:



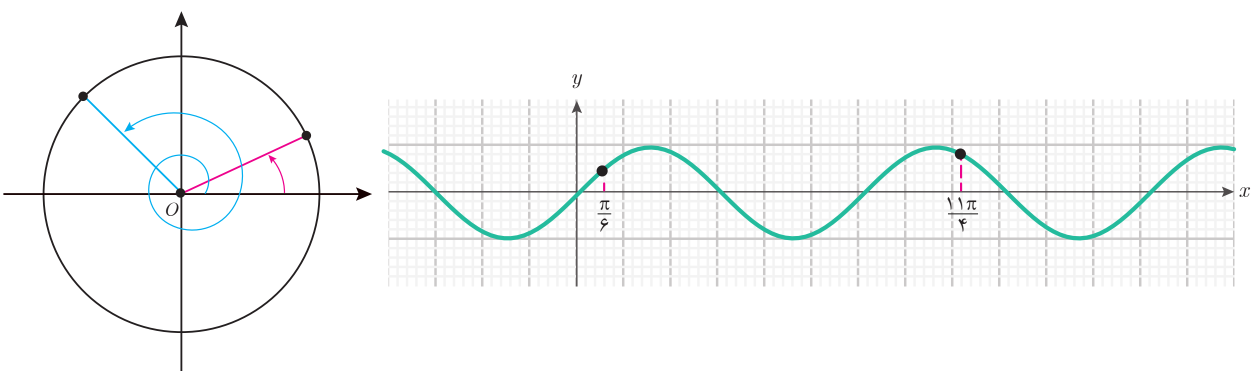
نمودار $f(x)=\sin x$ در بازهٔ $[-2\pi,0]$ به‌صورت زیر است:



بنابراین، نمودار $f(x)=\sin x$ در $\mathbb{R}$ به‌صورت زیر است.



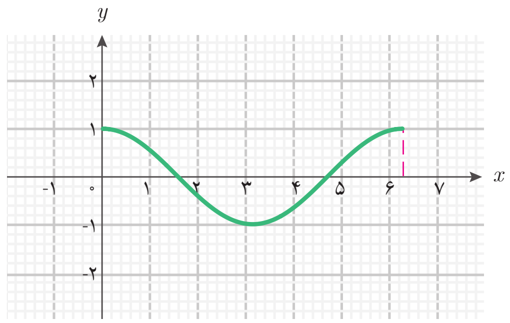
هر نقطه از نمودار بالا متناظر یک زاویهٔ چرخش روی دایرهٔ مثلثاتی است. برای مثال، در شکل زیر، دو زاویهٔ چرخش $\frac{\pi}{6}$ و $2\pi+\frac{3\pi}{4}$ با نقطهٔ متناظر آنها روی نمودار تابع $\sin x$ مشخص شده است.

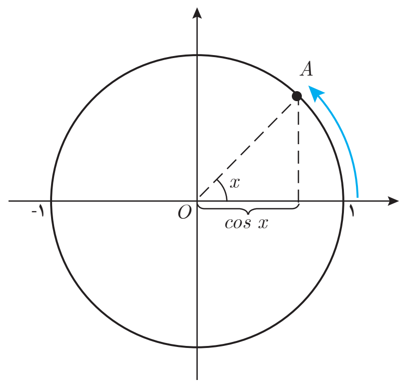


مثال ۵

نمودار تابع $g(x)=\cos x$ را در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

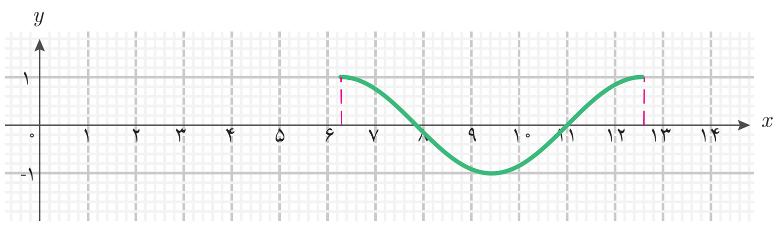
چگونگی تغییرات مقدار $\cos x$ برحسب x، مشابه تغییرات $\sin x$ برحسب x است.
با تغییر x از صفر تا π مشاهده می‌شود که مقدار $\cos x$ از ۱ تا ۱- کاهش می‌یابد. سپس، با تغییر x از π تا ۲π مقدار $\cos x$ از ۱- تا ۱ افزایش می‌یابد. شکل زیر، نمودار تابع $\cos x$ را در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ نشان می‌دهد.



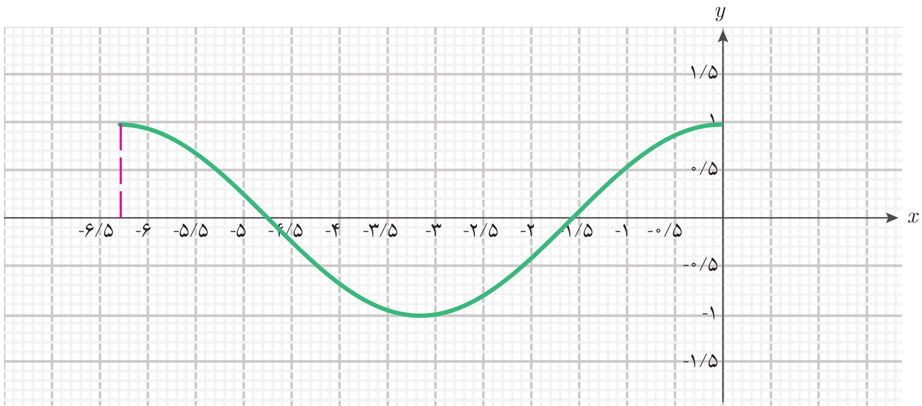


با افزایش مقادیر x (بیش از ۲πرادیان) و ادامهٔ حرکت نقطه A (پس از یک دور کامل روی دایره مثلثاتی)، مانند سینوس، تغییرات $\cos x$ در بازهٔ $[۲\pi,۴\pi]$ مشابه تغییرات آن در بازه $[۰,۲\pi]$ است. زیرا اگر به زاویه‌ای مضرب صحیحی از ۲π را اضافه یا از آن کم کنیم، نسبت‌های مثلثاتی آن تغییر نمی‌کنند. بنابراین، نمودار تابع $\cos x$ در بازه‌های دیگر، مانند ...، $[۴\pi,۶\pi]$، $[۲\pi,۴\pi]$، $[-۲\pi,۰]$، ...، همان انتقال یافتهٔ نمودار تابع $\cos x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ است. پس، برای رسم نمودار تابع $\cos x$ در بازه‌های دیگر، می‌توان نمودار این تابع در بازه $[۰,۲\pi]$ را به اندازهٔ مضارب صحیح $۲\pi \approx ۶/۲۸$ به چپ یا راست منتقل کرد.

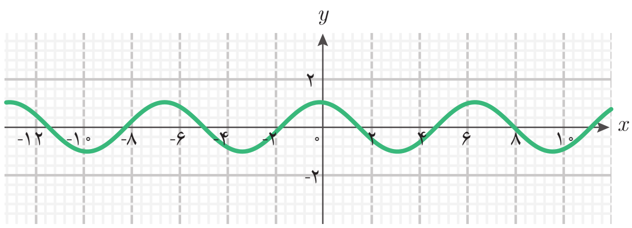
برای مثال، نمودار $\cos x$ در بازه $[۲\pi,۴\pi]$ به‌صورت زیر است:



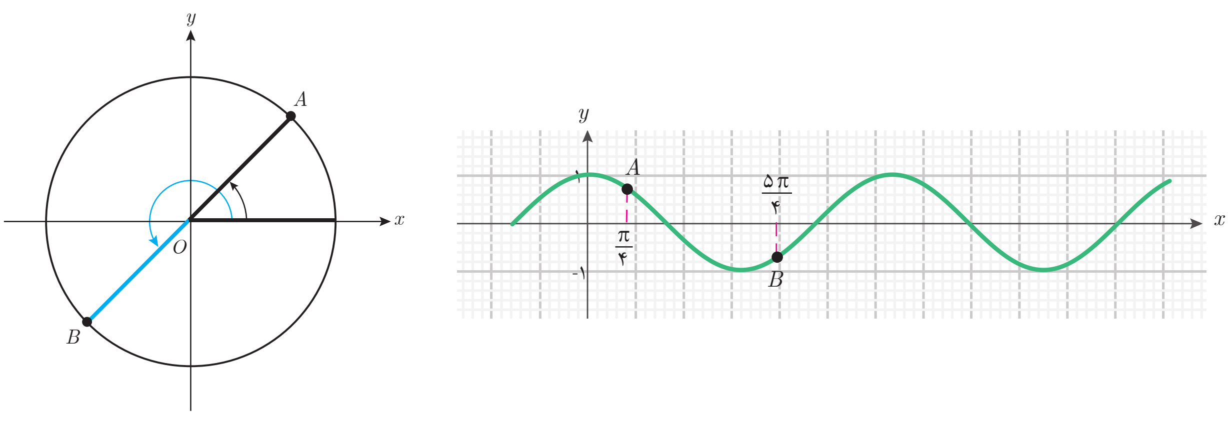
همچنین، نمودار $\cos x$ در بازهٔ $[-۲\pi,۰]$ به‌صورت زیر است:



بنابراین، نمودار تابع $g(x) = \cos x$ در $\mathbb{R}$ به شکل زیر است:

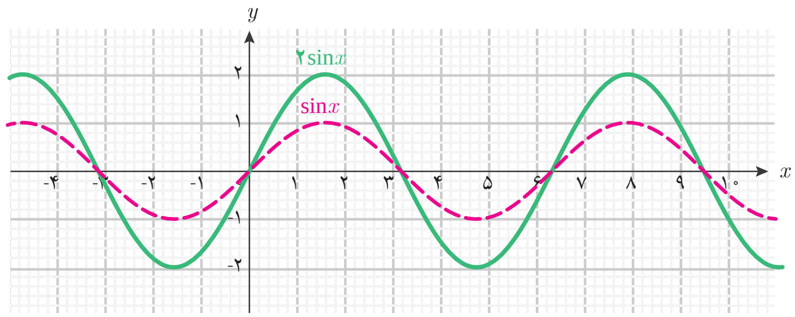


هر نقطه از این نمودار، متناظر یک زاویهٔ چرخش روی دایرهٔ مثلثاتی است. برای مثال، در شکل زیر دو زاویهٔ چرخش $\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{۵\pi}{۴}$ با نقطهٔ متناظر آنها روی نمودار تابع $\cos x$ مشخص شده است.



مثال ۶

تابع مثلثاتی $h(x)=۲\sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مقدار این تابع در نقطهٔ x با ضرب ۲ در $\sin x$ حاصل می‌شود. نمودار این تابع و تابع $\sin x$ با هم در شکل زیر رسم شده‌اند.

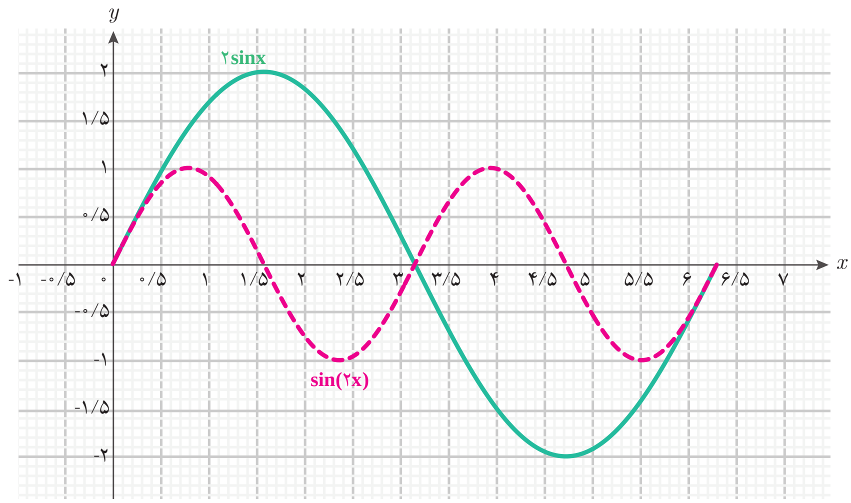


همان‌طور که در شکل دیده می‌شود، عرض نقاط نمودار تابع $۲\sin x$ با ضرب ۲ در عرض نقاط نمودار تابع $\sin x$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۷

تابع‌های $\sin(۲x)$ و $۲\sin x$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید و تفاوت آنها را توضیح دهید.

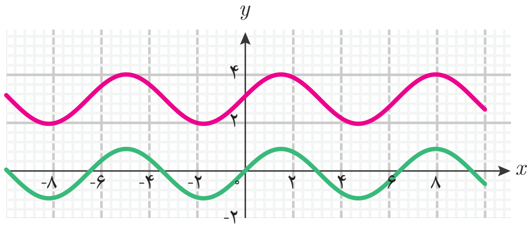
نمودار این دو تابع را در این بازه به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



همان‌طور که مشاهده می‌شود این دو تابع تفاوت‌های مهمی با هم دارند و با هم مساوی نیستند. مقادیر تابع $۲\sin x$ از ۲ تا ۲- تغییر می‌کنند ولی مقادیر تابع $\sin(۲x)$ از ۱ تا ۱- تغییر می‌کنند. در بازهٔ $[\pi,۲\pi]$ نمودار تابع $۲\sin x$ در بازهٔ $[۰,\pi]$ تکرار نمی‌شود ولی نمودار تابع $\sin(۲x)$ تکرار می‌شود.

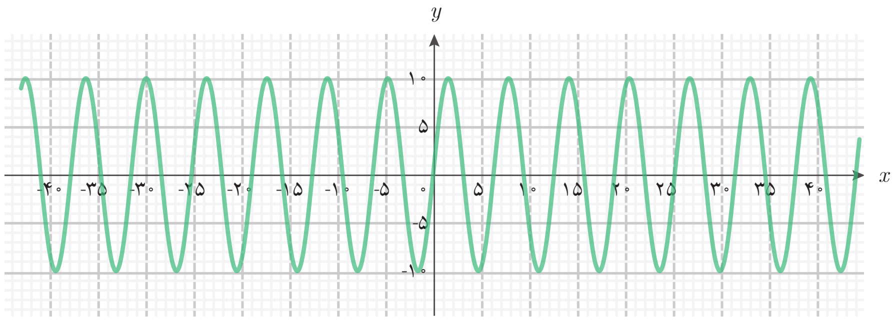
مثال ۸

تابع مثلثاتی $f(x)=۳+\sin x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار $\sin x$ را رسم می‌کنیم. سپس با انتقال این نمودار به اندازهٔ ۳ واحد به بالا نمودار تابع f به‌دست می‌آید.

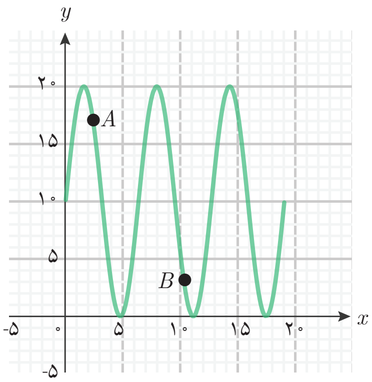


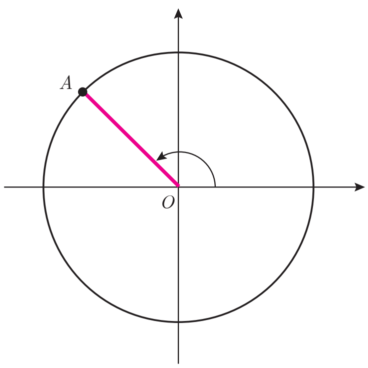
مثال ۹

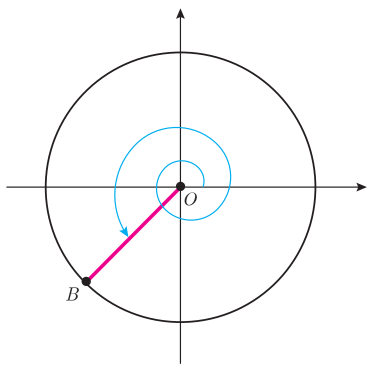
تابع مثلثاتی $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ را که در فعالیت (۲) به‌دست آمده است، در نظر بگیرید. برای رسم نمودار این تابع، ابتدا نمودار $۱۰\sin x$ را رسم می‌کنیم که به شکل زیر در می‌آید.



سپس، انتقال این نمودار به اندازهٔ ۱۰ واحد به بالا، نمودار تابع $f(x)=۱۰+۱۰\sin x$ را می‌سازد. نمودار این تابع با دامنهٔ $[۰,۶\pi]$ به شکل زیر است. نقاط متناظر در دو حالت از چرخ‌و فلک در نمودار نشان داده شده است.

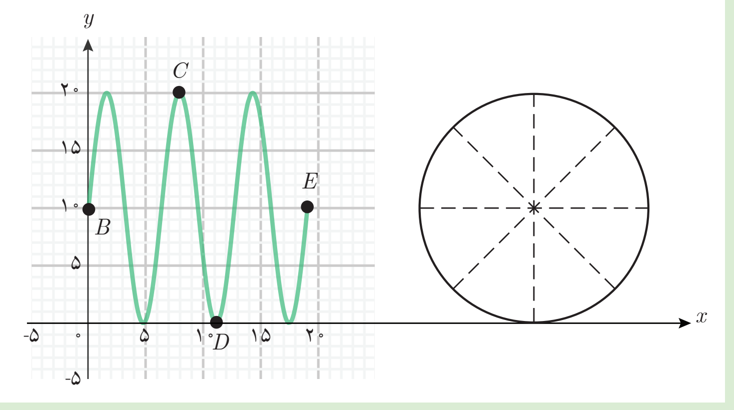






کار در کلاس ۳

۱ نمودار تابع $f(x)=10+10\sin x$ را که در فعالیت (۲) به‌دست آمده است، با دامنهٔ $[0,6\pi]$ در نظر بگیرید.



الف) هر یک از نقاط B، C، D و E روی نمودار، متناظر کدام زاویهٔ چرخش است؟ مکان کابین روی چرخ‌وفلک را در هر کدام از این چهار نقطه مشخص کنید.

ب) نقطه‌ای را روی نمودار مشخص کنید که نشان می‌دهد کابین یک دور چرخیده است.

پ) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در پایین‌ترین نقطه است؟

ت) به ازای چه مقادیری از زاویهٔ چرخش در دامنهٔ تابع، کابین در بالاترین نقطه است؟

۲ نمودارهای تابع‌های $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف) آیا می‌توان با انتقال یکی به چپ یا راست، دیگری را به‌دست آورد؟ مقدار این انتقال چقدر است؟

ب) چه شباهت‌هایی بین این دو نمودار می‌بینید؟

مسائل

۱ برای تابع $u(x)=۴\sin x-۳\cos x(۲x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، مقادیر $u(۲)$ و $u(\frac{\pi}{۶})$ و $u(۳\pi)$ را به‌دست آورید. (در صورت نیاز از ماشین‌حساب استفاده کنید.)

۲ سه تابع $f(x)=۳\cos x$ و $g(x)=\cos x+۲$ و $h(x)=۳\cos x-۲$ را با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ در نظر بگیرید.

الف) نمودار هر یک از این تابع‌ها را به همراه نمودار تابع $\cos x$ در دامنهٔ $[۰,۲\pi]$ رسم کنید.

ب) با توجه به نمودارهای به‌دست آمده توضیح دهید که نمودار این تابع‌ها چگونه از روی نمودار تابع $\cos x$ به‌دست می‌آید.

۳ با رسم نمودارهای دو تابع $\sin(۲x)$ و $۲\sin x.\cos x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ (به کمک جئوجبرا) درستی تساوی $\sin(۲x)=۲\sin x.\cos x$ را بررسی کنید.

۴ به کمک نمودار تابع $f(x)=\cos x$ با دامنهٔ $[۰,۲\pi]$، جواب‌های معادلهٔ $\cos x=۰$ را در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ به‌دست آورید.

۵ دو تابع $f(x)=\cos x$ و $g(x)=\sin(x+\frac{\pi}{۲})$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. سه زاویهٔ دلخواه برای x در نظر بگیرید و درستی تساوی $f(x)=g(x)$ را بررسی کنید. به کمک رسم نمودار این دو تابع (با جئوجبرا) تحقیق کنید که آیا تساوی $f(x)=g(x)$ به ازای هر مقدار x برقرار است؟

۳ــ تابع نمایی

حسن در حال مشاهدهٔ یک برنامهٔ تلویزیونی با عنوان «میزگرد تغییرات جمعیت و تأثیر آن بر توسعهٔ پایدار» بود. سخنان یکی از شرکت‌کنندگان در میزگرد توجه او را جلب کرد. این شرکت‌کننده ضمن بیان تأثیر تغییرات جمعیت بر رشد و توسعهٔ اقتصادی، به تغییر جمعیت کشور در طی سال‌های ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵ اشاره کرد. او با پیش‌بینی میزان جمعیت در سال‌های آینده، پیشنهادهایی برای برنامه‌ریزی مناسب جهت ایجاد اشتغال، تأمین بهداشت و درمان عمومی و غیره مطرح می‌کرد.

حسن علاقه‌مند بود بداند که نحوهٔ پیش‌بینی مقدار جمعیت در سال‌های آینده به چه صورت است. مجری برنامه چند بار از مدل ریاضی رشد جمعیت صحبت کرده بود. او به خاطر آورد که دبیر ریاضی گفته بود: پدیده‌های طبیعی را می‌توان به کمک ریاضی مدل‌سازی کرد و آنها را مورد تجزیه و تحلیل قرار داد. بنابراین تصمیم گرفت که سؤال خود را با دبیر ریاضی مطرح کند. دبیر با شنیدن سؤال حسن، ضمن ابراز خوشحالی از طرح این سؤال، گفت: برای نمایش تغییرات جمعیت در طول زمان از نوعی تابع استفاده می‌شود که در جلسات آینده به آن خواهیم پرداخت. او در روز مورد نظر فعالیت زیر را مطرح کرد.

فعالیت ۴

جمعیت یکی از شهرهای ایران در سال ۱۳۹۰ یک میلیون نفر بوده است و نرخ رشد سالانهٔ جمعیت آن شهر ۲ درصد است.

۱ جمعیت شهر در پایان اولین سال چند برابر خواهد شد؟

۲ در جدول مقابل در هر مستطیل، یک عدد توان‌دار مناسب قرار دهید که جمعیت شهر را در پایان هر سال برحسب میلیون نفر نشان بدهد.

۳ اگر $f(x)$ جمعیت شهر، در پایان سال x باشد و رشد سالانهٔ جمعیت این شهر تا ۲۰ سال با ۲ درصد ادامه یابد، ضابطه و دامنهٔ تابع f را بنویسید.

شمارهٔ سال	جمعیت برحسب میلیون نفر
۱	$\boxed{}$
۲	$(۱/۰۲)^{۲}$
۳	$\boxed{}$
۴	$\boxed{}$
⋮	⋮
x	$\boxed{}$
⋮	⋮
۲۰	$\boxed{}$

در فعالیت صفحهٔ قبل تغییرات جمعیت شهری را بررسی کردید که سالانه ۲ درصد افزایش جمعیت داشت. یعنی، جمعیت این شهر هر سال ۱/۰۲ برابر می‌شود. جمعیت این شهر از سال ۱۳۹۰ به بعد، پس از x سال به‌صورت تابع با قانون $f(x)=(۱/۰۲)^x$ (برحسب میلیون نفر) است. قانون این تابع برای ۲۰ سال و در پایان هر سال معتبر است، بنابراین دامنهٔ تابع، $\{۱,۲,...,۲۰\}$ است. قانون این تابع به‌صورت یک عبارت توان‌دار است که **متغیر در توان** آن است. این گونه تابع‌ها را **تابع نمایی** می‌نامند.

با توجه به اینکه در توان‌رسانی به توان اعداد حقیقی دلخواه، پایه همواره مثبت است و توان هر عددی می‌تواند باشد، بنابراین دامنهٔ یک تابع با قانون a^x, $(۰<a)$ ، می‌تواند هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد.

تعریف

تابع نمایی

برای یک عدد حقیقیِ مثبتِ a که $a\neq۱$، تابع‌هایی با قانون $f(x)=a^x$ را که دامنهٔ آن می‌تواند هر زیر مجموعه‌ای از $\mathbb{R}$ باشد، **تابع نمایی با پایهٔ a** می‌نامند.

همچنین، تابع‌های با قانون $f(x)=ka^x$ ، $(k\neq۰)$ نیز تابع نمایی نامیده می‌شوند.

مثال ۱۰

تابع $f(x)=۴^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک تابع نمایی است. در این تابع داریم:

$$f(۲)=۴^۲=۱۶\ ,\ f(۰)=۴^۰=۱\ ,\ f(\frac{۱}{۲})=۴^{\frac{۱}{۲}}=\sqrt{۴}=۲\ ,\ f(-۱)=۴^{-۱}=\frac{۱}{۴}$$

کار در کلاس ۴

تابع $f(x)=۵\times۲^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید، مقادیر زیر را به‌دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $f(۲)$ ب) $f(۰)$ پ) $f(-۱)$ ت) $f(\frac{۱}{۳})$

تابع‌های نمایی ویژگی‌های مشترک و رفتارهای خاصی دارند. برای آشنایی بیشتر با خواص و ویژگی‌های تابع‌های نمایی، فعالیت صفحه بعد را انجام دهید.

فعالیت ۵

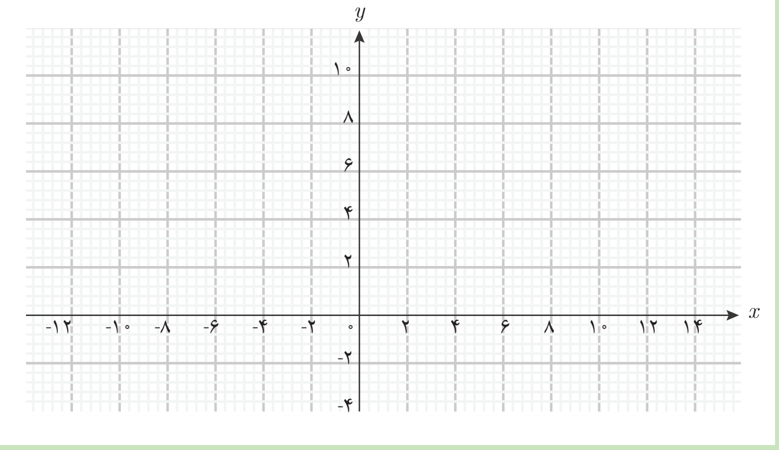
تابع $f(x)=۳^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و سپس جدول زیر را کامل کنید.

x	۳-	۲-	۱-	۰	۱	۲	۲/۱
۳^x	...	...	...	۱	...	...	...

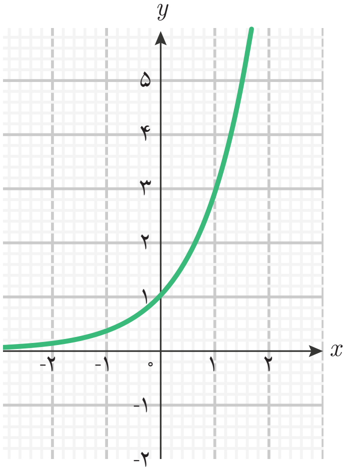
۱ با افزودن ۱ واحد به مقدار x، مقدار $f(x+۱)$ چند برابر $f(x)$ خواهد شد؟

۲ با افزایش مقدار x، مقدار تابع چه تغییری می‌کند (افزایش می‌یابد/ کاهش می‌یابد)؟

۳ نقاطی از نمودار تابع را که در جدول به‌دست آورده‌اید، در صفحهٔ مختصات زیر مشخص کنید و به کمک آنها نمودار تقریبی تابع را رسم کنید.



فعالیت بالا نشان می‌دهد تابع $f(x)=۳^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ رفتاری افزایشی دارد، یعنی با افزایش مقدار x مقدار $f(x)$ نیز افزایش می‌یابد. میزان افزایش مقادیر تابع به‌گونه‌ای است که با ۱ واحد افزایش x، مقدار $f(x+۱)$ سه برابر $f(x)$ می‌شود. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.



در مثال زیر رفتار یکی دیگر از این گونه تابع‌ها را بررسی می‌کنیم. در این مثال پایهٔ تابع نمایی، عددی بزرگ‌تر از ۱ است.

مثال ۱۱

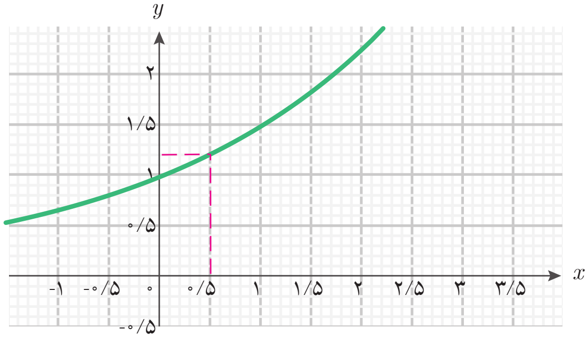
جدول زیر مربوط به تابع $f(x)=(\frac{۳}{۲})^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است.

x	-۱	۰	۱	۲	۳	۴
$(\frac{۳}{۲})^x$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۹}{۴}$	$\frac{۲۷}{۸}$	$\frac{۸۱}{۱۶}$

$\times\frac{۳}{۲}$ $\times\frac{۳}{۲}$ $\times\frac{۳}{۲}$

جدول نشان می‌دهد با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار تابع یعنی $(\frac{۳}{۲})^x$، $\frac{۳}{۲}$ برابر (۱/۵ برابر) خواهد شد. نمودار این تابع به شکل زیر است.

نمودار این تابع در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۰ \\ ۱ \end{bmatrix}$ محور yها را قطع می‌کند و بالای محور طول‌ها واقع است؛ زیرا مقادیر تابع همواره مثبت است. یکی از موارد استفاده از این نمودار، یافتن برخی از توان‌های $\frac{۳}{۲}$ مانند یافتن مقدار تقریبی $\sqrt{۱/۵}$ (یعنی $(۱/۵)^{\frac{۱}{۲}}$) است. این محاسبه بدون استفاده از ماشین‌حساب به سادگی امکان‌پذیر نیست. با استفاده از نمودار می‌توان دید مقدار $\sqrt{۱/۵}$ تقریباً ۱/۲۲ است؛ یعنی: $\sqrt{۱/۵}\approx ۱/۲۲$.



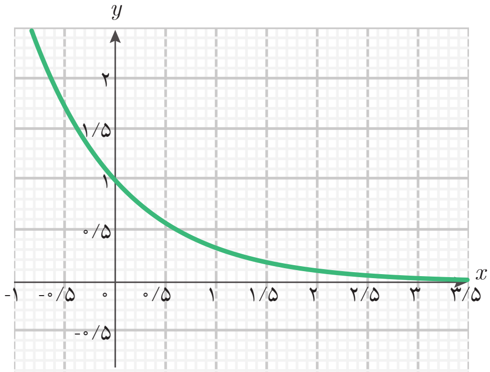
مثال ۱۲

تابع $f(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ یک تابع نمایی با پایهٔ $\frac{۱}{۳}$ است. جدول زیر مقادیر تابع به ازای برخی از مقادیر x را نشان می‌دهد:

x	۲-	۱-	۰	۱	۲	۳
$f(x)=(\frac{۱}{۳})^x$	۹	۳	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$

$\times\frac{۱}{۳}$ $\times\frac{۱}{۳}$ $\times\frac{۱}{۳}$ $\times\frac{۱}{۳}$ $\times\frac{۱}{۳}$

با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار $f(x)$، $\frac{۱}{۳}$ برابر خواهد شد. بنابراین $f(x)$ کاهش می‌یابد. نمودار این تابع به‌صورت روبه‌رو است.



نمودار این تابع در نقطهٔ $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ محور yها را قطع می‌کند و بالای محور xها واقع است؛ زیرا مقادیر تابع همواره مثبت است.

با توجه به مثال‌هایی که از تابع‌های نمایی بررسی کردیم، دربارهٔ رفتار این تابع‌ها می‌توان گفت:

در تابع نمایی $f(x)=a^x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$، با افزودن ۱ واحد به متغیر x، مقدار $f(x)$، a برابر خواهد شد. اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقدار $f(x)$ افزایش خواهد یافت و اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقدار $f(x)$ کاهش خواهد یافت. نمودار این‌گونه تابع‌ها همواره در بالای محور xها واقع است زیرا هر توانی از یک عدد مثبت، عددی مثبت است. نمودار این تابع از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد؛ زیرا $f(۰)=a^۰=۱$.

مثال ۱۳

با داشتن نرخ سود سالانهٔ یک بانک، مقدار پس‌انداز هر فرد در پایان هر سال چگونه به‌دست می‌آید؟

فرض کنید نرخ سود سالانهٔ اعلام‌شده توسط یکی از بانک‌ها ۱۰ درصد باشد و فردی ۸ میلیون تومان در این بانک سپرده‌گذاری کرده باشد. بنابراین،

در پایان سال اول $۸\times\frac{۱۰}{۱۰۰}=۸\times ۰/۱$ میلیون تومان به این فرد سود تعلق می‌گیرد و این سود، به موجودی او اضافه می‌شود. بنابراین، این فرد در پایان سال اول $۸+۸\times ۰/۱$ یعنی $۸(۱+۰/۱)$ میلیون تومان پس‌انداز خواهد داشت.

از آنجا که موجودی او در پایان سال اول $۸(۱+۰/۱)$ میلیون تومان است، در پایان سال دوم $۸(۱+۰/۱)\times ۰/۱$ تومان سود به این فرد تعلق می‌گیرد. بنابراین، پس‌انداز این فرد در پایان سال دوم به شکل زیر محاسبه می‌شود.

$$۸(۱+۰/۱)+۸(۱+۰/۱)\times ۰/۱=۸(۱+۰/۱)(۱+۰/۱)=۸(۱+۰/۱)^{۲}$$

اگر با همین شیوه، پس‌انداز این فرد را در پایان سال سوم محاسبه کنیم، مقدار آن $۸(۱+۰/۱)^{۳}$ میلیون تومان خواهد بود. اگر این وضعیت تا سال nاُم ادامه داشته باشد، مقدار پس‌انداز در پایان سال nاُم برابر $۸(۱+۰/۱)^{n}$ خواهد شد.

کار با ماشین حساب

با استفاده از ماشین حساب مقدار پس‌انداز فردی را که ۸ میلیون تومان در این بانک سپرده‌گذاری کرده است، در پایان سال سوم برحسب میلیون تومان محاسبه کنید:

8 → * → (→ 1 → + → . → 1 →) → x^y → 3 → =

خواندنی

عدد نپر (Napier)

عدد نپر، عددی خاص در ریاضی است که نقش مهمی در تابع‌های نمایی ایفا می‌کند. اولین بار نپر این عدد را معرفی کرد ولی اویلر(Euler) بیشترین کارها را با آن انجام داد. برنولی (Bernoulli) نیز به هنگام کار در زمینهٔ سود مرکب به این عدد پی برد.

برنولی فرض کرد اگر ۱ میلیون تومان سرمایه را در بانکی پس‌انداز کنید که در پایان سال ۱۰۰ درصد سود پرداخت کند، در این صورت پس‌انداز شما پس از ۱ سال ۲= (۱+۱) میلیون تومان خواهد بود. اگر بانک تصمیم بگیرد درصد سود را نصف کند و به جای آن هر شش ماه یک بار سود پرداخت کند، در این حالت، مقدار پس‌انداز در آخر سال برابر $(1+\frac{1}{2})^{2}$ میلیون تومان (یعنی ۲/۲۵ میلیون تومان) خواهد بود. اگر بانک با نرخ $\frac{100}{3}$ درصد سود را محاسبه کند و به جای آن هر $\frac{1}{3}$ سال (چهار ماه) سود پرداخت کند، در این حالت، مقدار پس‌انداز در آخر سال برابر $(1+\frac{1}{3})^{3}$ میلیون تومان (تقریباً ۲/۳۷۰) خواهد بود. به همین ترتیب اگر ادامه دهیم و بانک با نرخ $\frac{100}{n}$ درصد سود را محاسبه کند و به جای آن هر $\frac{1}{n}$ سال سود پرداخت کند، در این حالت، مقدار پس‌انداز در آخر سال برابر $(1+\frac{1}{n})^{n}$ میلیون تومان خواهد شد. با ادامه این روند، سود محاسبه شده در پایان سال در حال افزایش است، ولی از مقدار خاصی بیشتر نخواهد شد. این مقدار خاص همان عدد نپر است. این عدد را با e نشان می‌دهند. $e \approx 2/7182$.

کار در کلاس ۵

۱ دو جدول زیر نقاطی از صفحهٔ مختصات را مشخص می‌کنند. تعیین کنید نقاط نمایش داده شده در کدام جدول می‌توانند نقاطی از نمودار یک تابع نمایی باشند. دلیل خود را بیان کنید و در هر کدام قانون تابعی را بنویسید که نقاط جدول می‌توانند روی نمودار آن قرار گیرند.

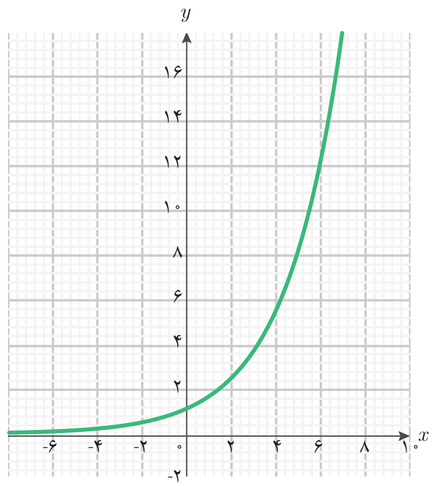
الف)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۴	۱۶	۶۴	۲۵۶

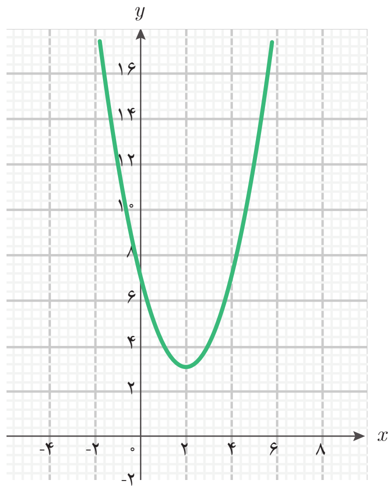
ب)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	۵	۹	۱۳	۱۷

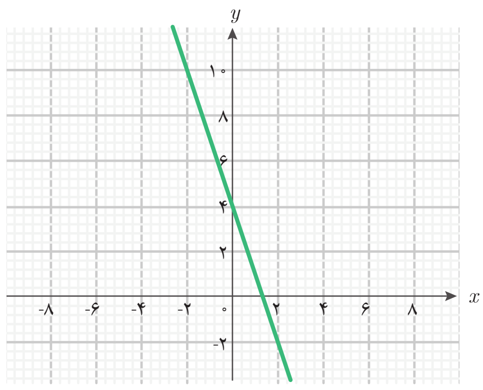
۲ در هر کدام از نمودارهای زیر نوع تابع (تابع نمایی، تابع خطی، تابع درجه دوم) را مشخص کنید.
اگر تابع نمایی باشد، آیا پایه بین صفر و یک است یا بزرگ‌تر از یک؟



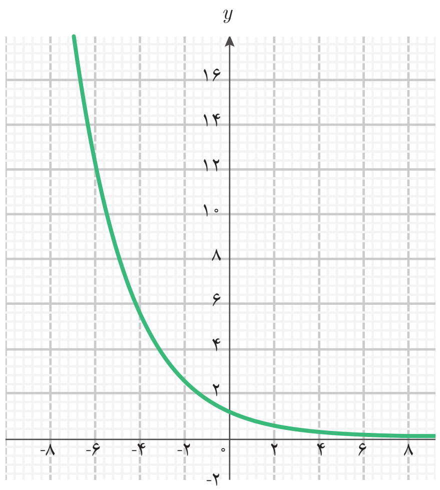
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

خواندنی

استهلاک

یکی از پدیده‌های مهم اقتصادی، کاهش ارزش یک دارایی ثابت بر اثر عواملی نظیر گذر زمان، فرسایش و کار کردن است. این پدیده را **استهلاک** می‌نامند. برای مثال یک دستگاه چاپ با قیمت ۵۰ میلیون تومان ممکن است هر سال ۳۵ درصد (نرخ استهلاک) از ارزش آن به دلیل فرسودگی کاهش یابد. فرض کنید ۵ سال این کاهش با همین نرخ ادامه یابد.

در پایان سال اول قیمت این دستگاه $\frac{۳۵}{۱۰۰}\times ۵۰$ میلیون تومان کاهش می‌یابد. بنابراین ارزش این دستگاه در پایان سال اول $۵۰-۵۰\times\frac{۳۵}{۱۰۰}=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})$، میلیون تومان خواهد بود.

به همین ترتیب، ارزش این دستگاه در پایان سال دوم و سوم برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر قابل محاسبه است:

پایان سال دوم: $$۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۲}$$

پایان سال سوم: $$۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۲}(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۳}$$

تابع $g(n)=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{n}$ با دامنهٔ $\{۱,۲,۳,۴,۵\}$، ارزش این دستگاه را در پایان سال nاُم برحسب میلیون تومان نشان می‌دهد. در این مثال، g یک تابع نمایی است و چون پایهٔ این تابع نمایی، کوچک‌تر از ۱ است، با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع کاهش می‌یابد. ارزش این دستگاه در پایان سال پنجم به‌صورت زیر خواهد بود:

$$g(۵)=۵۰(۱-\frac{۳۵}{۱۰۰})^{۵}=۵۰(\frac{۶۵}{۱۰۰})^{۵}=۵۰(\frac{۱۳}{۲۰})^{۵}\approx ۵/۸$$

مسائل

۱ اگر $f(x)=(\frac{۱}{۴})^x$ و $g(x)=۵^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید و در صورت امکان ساده کنید.

الف) $f(۰)$ ب) $g(-۱)$ پ) $f(\frac{۱}{۲})$ ت) $f(-۱)$ ث) $g(\frac{۱}{۳})$

۲ در جدول‌های زیر مقادیری از چهار تابع مشخص شده‌اند. کدام جدول می‌تواند مربوط به یک تابع نمایی باشد؟ در این حالت، قانون آن تابع نمایی را مشخص کنید.

الف)

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۳}$	۱	۳	۴

ب)

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۱	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۹}$	$\frac{۱}{۲۷}$	$\frac{۱}{۸۱}$

پ)

x	-۱	۰	۱	۲	۳
y	۲	۱	۰/۵	۰/۲۵	۰/۶۲۵

ت)

x	-۳	-۲	-۱	۰	۱
y	$\frac{۱}{۸}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۲}$	۱	۲

۳ جدول زیر را طبق نمونه کامل کنید (دامنهٔ همهٔ تابع‌ها $\mathbb{R}$ است).

ردیف	قانون تابع	تغییرات y به ازای ۱ واحد افزایش x	محل تقاطع با محور yها
۱	$y=۶^x$	۶ برابر	$\begin{bmatrix}۰\\۱\end{bmatrix}$
۲	$y=(۰/۹)^x$	...	...
۳	$y=\frac{۱}{۳}\times ۲^x$	....	...
۴	$y=۳(\frac{۱}{۵})^x$	...	...

۴ با افزایش مقادیر x، مقادیر کدام تابع افزایش و مقادیر کدام تابع کاهش می‌یابند؟ (دامنهٔ همهٔ این تابع‌ها را $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید)

الف) $f(x)=۲^x$ ب) $g(x)=۲۰۰(\frac{۱}{۳})^x$ پ) $h(x)=\frac{۱}{۳}(\frac{۳}{۲})^x$

۵ نرخ سود سالانهٔ اعلام‌شده توسط یکی از بانک‌ها تا ۵ سال، ۱۲ درصد است. آقای بهرامی ابتدای سال ۱۳۹۶ در این بانک ۵ میلیون تومان پس‌انداز کرده است.

الف) قانون تابعی را بنویسید که از طریق آن بتوان موجودی آقای بهرامی را در پایان سال nاُم محاسبه کرد.

ب) موجودی حساب پس‌انداز آقای بهرامی را در پایان سال پنجم به‌صورت یک عدد توان‌دار بنویسید و مقدار تقریبی آن را برحسب تومان بنویسید.

۶ تابع $f(x)=۳\times۲^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.

الف) جدول مقادیر این تابع را در نقاط به طول ۲- و ۱- و ۰ و ۱ و ۲ تشکیل دهید.

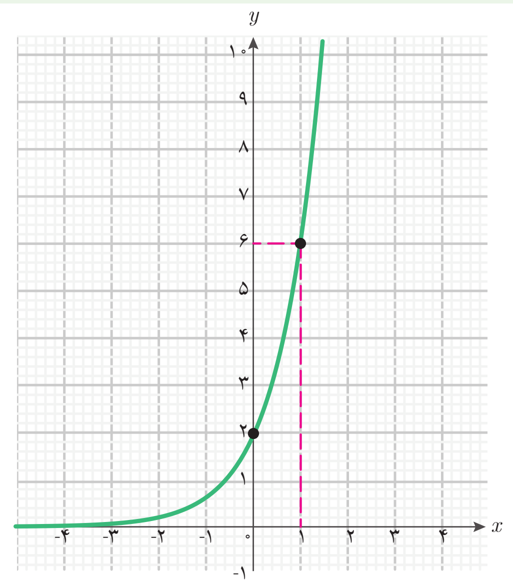
ب) نمودار این تابع، محور yها را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

پ) با یک واحد افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع چه تغییری می‌کند؟

۷ تابع نمایی $f(x)=ab^x$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است.

الف) قانون این تابع را بنویسید.

ب) مقادیر $f(۲)$ و $f(-۱)$ را به‌دست آورید.

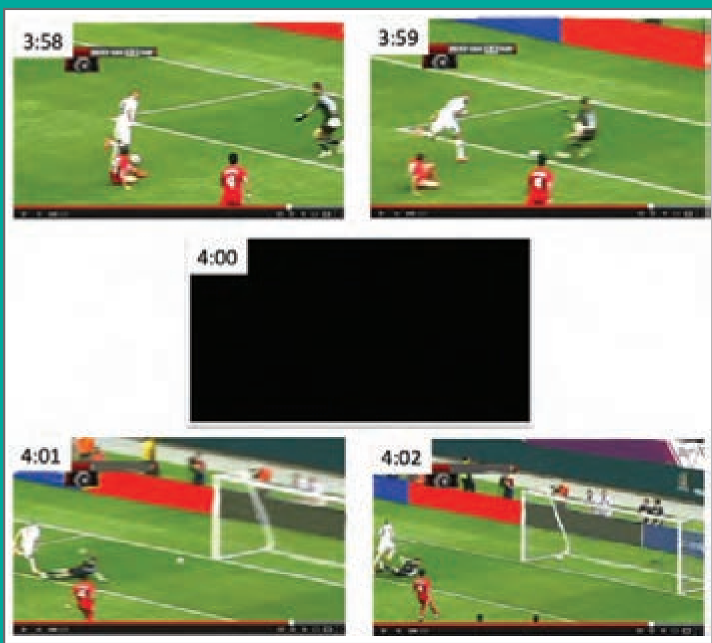


استانداردهای ارزشیابی پودمان اول

<table>
<tr><th>عنوان پودمان</th><th>تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)</th><th>استاندارد عملکردی (کیفیت)</th><th>سطوح انتظارات</th><th>شاخص تحقق</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td rowspan="3">پودمان اول: کاربرد برخی تابع‌ها در زندگی روزمره</td><td>مدل‌سازی و حل مسائل به کمک تابع چندضابطه‌ای</td><td rowspan="3">مدل‌سازی و حل مسائل مرتبط با تابع‌های چندضابطه‌ای، مثلثاتی و نمایی</td><td>بالاتر از حد انتظار</td><td>□ مدل‌سازی و حل مسائل واقعی (مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با تابع‌های چندضابطه‌ای، مثلثاتی و نهایی</td><td>۳</td></tr>
<tr><td>مدل‌سازی و حل مسائل به کمک تابع مثلثاتی</td><td>حد انتظار</td><td>□ مدل‌سازی و حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با تابع‌های چندضابطه‌ای، مثلثاتی و نمایی</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>مدل‌سازی و حل مسائل به کمک تابع نمایی</td><td>پایین‌تر از حد انتظار</td><td>□ درک و کاربرد تابع‌های چند ضابطه‌ای، مثلثاتی و نمایی</td><td>۱</td></tr>
<tr><td colspan="5">نمره مستمر از ۵:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">نمره واحد یادگیری از ۳:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">نمره واحد یادگیری از ۲۰:</td><td></td></tr>
</table>

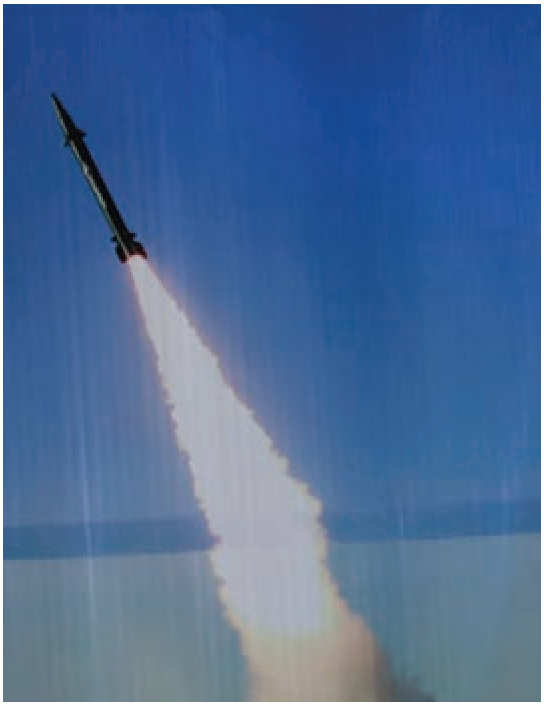
پودمان دوم

درک مفهوم حد



در هنگام پخش مسابقه فوتبال، برای لحظه‌ای تصویر صفحه نمایش تلویزیون قطع می‌شود. چگونه می‌توان حدس زد در این لحظه توپ کجا ست ؟

۱ــ حد تابع‌ها



امروز دبیر دربارۀ اصابت موشک به یکی از هواپیماهای جنگی که در ارتفاع بالا در حال پرواز بود، صحبت کرد. این سؤال برای سعید مطرح شد که ما چگونه می‌توانیم ارتفاع هواپیما را در لحظۀ اصابت موشک به‌دست آوریم؟

حمید گفت: من شنیده‌ام که هواپیماها دارای حداقل یک جعبۀ سیاه هستند که تمام اطلاعات پرواز در آن ضبط می‌شود. اگر جعبۀ سیاه هواپیما پیدا شود، حتماً ارتفاع هواپیما در لحظۀ اصابت موشک در آن ذخیره شده است.

دبیر گفت: بله، ممکن است که اطلاعات کلی پرواز در جعبۀ سیاه ذخیره شود؛ ولی در لحظۀ اصابت موشک، جعبۀ سیاه هم از کار می‌افتد و نمی‌تواند ارتفاع هواپیما را دقیقاً در همان لحظه نشان دهد.

حمید گفت: ولی ارتفاع هواپیما در لحظات قبل از اصابت موشک در جعبۀ سیاه وجود دارد. شاید به کمک آنها بتوان ارتفاع هواپیما را در همان لحظۀ خاص به‌دست آورد.

دبیر گفت: شما چه راه‌حلی به نظرتان می‌رسد؟

سعید گفت: اگر در لحظات قبل از اصابت موشک، ارتفاع هواپیما ثابت باشد، کافی است ارتفاع هواپیما را در آن لحظه‌ها، از جعبۀ سیاه به‌دست آوریم.

دبیر گفت: ما اطلاعی از ثابت بودن ارتفاع هواپیما نداریم و ممکن است هواپیما برای فرار از موشک در آن لحظه‌ها، ارتفاع خود را سریعاً تغییر داده باشد.

حمید گفت: فکر می‌کنم اگر در زمان‌های خیلی نزدیک به لحظۀ اصابت موشک، ارتفاع هواپیما را به‌دست آوریم، این مقدارها می‌توانند تقریب‌های خوبی از ارتفاع هواپیما در لحظۀ اصابت موشک باشند.

دبیر گفت: پیشنهاد خوبی است. با این روش ما می‌توانیم تقریب‌های خوبی از ارتفاع هواپیما در آن لحظه به‌دست آوریم، اما ارتفاع دقیق هواپیما را هنوز نیافته‌ایم.

حمید گفت: فرض کنیم ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به لحظۀ اصابت بدانیم، آیا می‌توان تشخیص داد که این مقادیر تقریبی به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

دبیر گفت: سؤال خوبی است. برای پاسخ به آن بهتر است فعالیت صفحه بعد را انجام دهیم.

فعالیت ۱

فرض کنید تابع h با قانون $h(t)=\dfrac{t^۲-۴t-۶۰}{۲t-۲۰}$، ارتفاع هواپیمایی را در بازهٔ زمانی $[۵,۱۰)$ مشخص کند. t را برحسب دقیقه و $h(t)$ را بر حسب کیلومتر درنظر بگیرید.

۱ ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۸$ چقدر است؟

....

۲ آیا در لحظهٔ $t=۱۰$ می‌توان از طریق تابع h، ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟ چرا؟

....

۳ آیا در زمان‌های قبل از $t=۱۰$ می‌توان از طریق تابع h، ارتفاع هواپیما را به‌دست آورد؟

....

۴ با کامل کردن جدول، ارتفاع هواپیما را در زمان‌های نزدیک به $t=۱۰$ به‌دست آورید.

....

t	۵	۹	۹/۵	۹/۹	۹/۹۵	۹/۹۹	۹/۹۹۹	$\to$	۱۰
$h(t)$	۵/۵	۷/۵	۷/۷۵	۷/۹۵	۷/۹۷۵	...	...	$\to$	?

۵ آیا می‌توانید حدس بزنید که با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

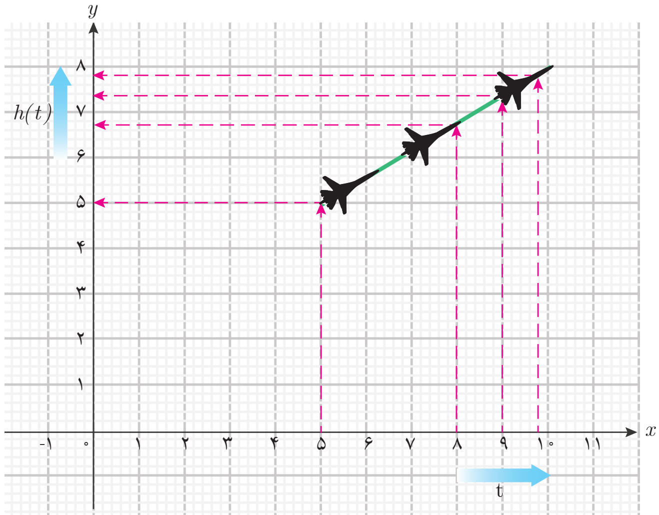
....

۶ آیا اکنون می‌توانید بگویید ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ چقدر بوده است؟

....

در فعالیت (۱) تابع h، ارتفاع یک هواپیما را در بازهٔ زمانی $[۵,۱۰)$ نشان می‌دهد. هدف از این فعالیت، یافتن ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ بود. این ارتفاع را با L نشان می‌دهیم. از آنجا که ۱۰ در دامنهٔ این تابع نیست، نمی‌توانیم مستقیماً L را از طریق قانون تابع h به‌دست آوریم؛ اما ارتفاع هواپیما برای زمان‌های قبل از $t=۱۰$ را می‌توان مشخص کرد. با توجه به پیوستگی حرکت هواپیما، می‌دانیم در

زمان‌های بسیار نزدیک به $t=۱۰$، ارتفاع هواپیما نزدیک به L است؛ پس کافی است ارتفاع هواپیما را برای زمان‌های بسیار نزدیک به $t=۱۰$ محاسبه کنیم و تشخیص دهیم این مقادیر به چه عددی نزدیک می‌شوند. با تشکیل جدول مقادیر تابع در نزدیکی‌های $t=۱۰$ مشاهده می‌کنیم که با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به ۸ نزدیک می‌شوند. این مطلب در نمودار تابع نیز به‌خوبی دیده می‌شود.



همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، با نزدیک شدن مقادیر t به ۱۰، مقادیر $h(t)$ به ۸ نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم ارتفاع هواپیما در لحظهٔ $t=۱۰$ برابر ۸ کیلومتر یا به عبارت دیگر $L=۸$ است. توجه داشته باشید که عدد ۸ را نمی‌توانستیم با محاسبهٔ مقدار تابع h در $t=۱۰$ به‌دست آوریم. زیرا ۱۰ در دامنهٔ این تابع نیست، بلکه با نزدیک کردن مقادیر t به ۱۰ و مشاهدهٔ نزدیک شدن مقادیر $h(t)$ به ۸ ، این مقدار را به‌دست آورده‌ایم. این عمل را یافتن **حدگیری** و عدد ۸ را **حد** تابع h در $t=۱۰$ می‌گویند.

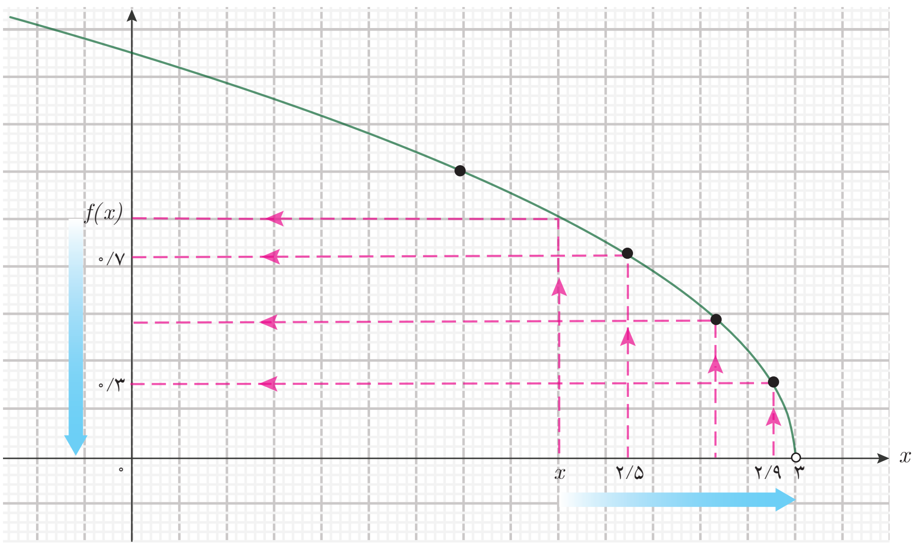
مثال ۱

تابع f را با دامنهٔ $(-\infty,۳)$ و قانون $f(x)=\dfrac{۳-x}{\sqrt{۳-x}}$ در نظر بگیرید. با نزدیک شدن متغیر تابع در دامنهٔ تابع به نقطهٔ $x=۳$، مقادیر تابع به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

برای پاسخ به این سؤال، جدول مقادیر تابع را به‌ازای xهای نزدیک به ۳ (در دامنهٔ f) محاسبه می‌کنیم.

x	۲/۵	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	۲/۹۹۹۹۹	$\to$ ۳
$f(x)$	۰/۷۰۷	۰/۳۱۶	۰/۱۰۰	۰/۰۳۱	۰/۰۱۰	۰/۰۰۳	$\to$?

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن مقادیر x به ۳، مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شوند. از طریق نمودار تابع نیز می‌توان همین نتیجه را به‌دست آورد. نمودار f را به کمک جئوجبرا رسم می‌کنیم.



به ازای هر مقدار x، می‌توان مقدار $f(x)$ را روی محور عرض‌ها از نمودار تابع به‌دست آورد. در شکل بالا، با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنهٔ f) روی محور طول‌ها به ۳ مقادیر $f(x)$ به صفر نزدیک می‌شوند. همان‌طور که نمودار نشان می‌دهد از طریق تغییر مقادیر تابع در جهت فلش‌ها می‌توان تشخیص داد که با نزدیک شدن x به ۳ روی محور طول‌ها، مقادیر $f(x)$ روی محور عرض‌ها به صفر نزدیک می‌شوند.

مثال ۲

تابع g را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ و قانون $g(x)=\dfrac{x^{۲}-x-۲}{x-۲}$ در نظر بگیرید. اگر مقادیر x را در دامنهٔ g به ۲ نزدیک کنیم، مقادیر $g(x)$ به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

دامنهٔ این تابع به صورت $(-\infty,۲)\cup(۲,+\infty)$ است. برای محاسبهٔ مقادیر $g(x)$ به ازای xهای

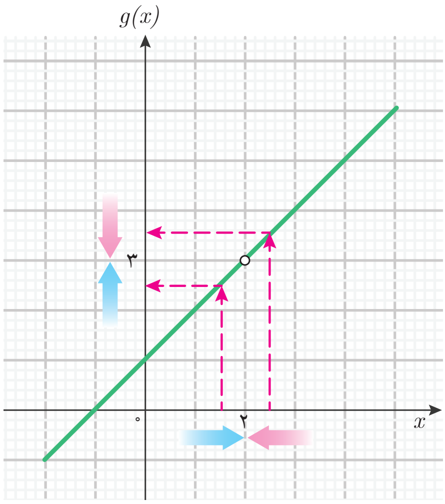
نزدیک ۲ در دامنه، می‌توان هم مقادیر بزرگ‌تر از ۲ و هم مقادیر کوچک‌تر از ۲ را برای x انتخاب کرد. بنابراین برای این تابع، جدولی به شکل زیر تشکیل می‌دهیم.

x	۱/۹۹	۱/۹۹۹	۱/۹۹۹۹	$\rightarrow$ ۲ $\leftarrow$	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱
$g(x)$	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	$\rightarrow$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن مقادیر x به ۲ (از دو طرف) مقادیر $g(x)$ به ۳ نزدیک می‌شوند. در اینجا نیز می‌گویند حد تابع g در نقطهٔ $x=$ ۲ برابر ۳ است.

در این مثال نیز می‌توان به کمک نمودار تابع g، حد آن را در نقطهٔ $x=$ ۲ به‌دست آورد. نمودار این تابع به شکل مقابل است.

نمودار نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x روی محور طول‌ها به ۲ (از دو طرف) مقادیر $g(x)$ روی محور عرض‌ها به ۳ نزدیک می‌شوند.



پس از توضیحات بالا دربارهٔ حد تابع‌ها، برای حمید سؤالی پیش آمد.

گفتگو

حمید پرسید: آیا می‌توان حد هر تابعی را در هر نقطه‌ای به‌دست آورد؟

دبیر گفت: برای یافتن حد یک تابع در یک نقطه، باید بتوانیم مقادیر تابع را در نزدیکی‌های آن نقطه حساب کنیم. اگر نتوانیم این کار را انجام دهیم، حد تابع در آن نقطه معنایی ندارد و قابل تعریف نیست.

حمید پرسید: چگونه تشخیص دهیم حد یک تابع در یک نقطه قابل تعریف نیست؟

دبیر گفت: اگر بخواهیم مقادیر تابع را در نزدیکی‌های یک نقطه محاسبه کنیم، لازم است دامنهٔ تابع، شامل نقاط نزدیک به آن نقطه باشد. این به معنای آن است که باید بتوانیم از داخل دامنهٔ تابع به آن نقطه نزدیک شویم.

سعید گفت: بنابراین، اگر درست متوجه شده باشم، حد یک تابع در هر نقطه‌ای قابل تعریف نیست. مثلاً برای یک نقطه مانند a باید تشخیص دهیم که آیا از داخل دامنهٔ تابع، می‌توان به a نزدیک شد یا خیر؟

حمید پرسید: برای مثال اگر دامنهٔ یک تابع بازهٔ $(\circ, +\infty)$ باشد، از داخل آن به چه نقاطی می‌توان نزدیک شد و به چه نقاطی نمی‌توان نزدیک شد؟

سعید گفت: به نظر من در این بازه به هر عدد مثبت می‌توان از دو طرف (مقادیر کوچک‌تر و بزرگ‌تر از آن عدد) نزدیک شد، ولی در این بازه، به هیچ عدد منفی نمی‌توان نزدیک شد. در مورد صفر، فقط از سمت راست (مقادیر بزرگ‌تر از صفر) می‌توانیم به آن نزدیک شویم.

دبیر گفت: بله، نظر شما درست است. بنابراین، برای تابعی که دامنهٔ آن بازهٔ $(\circ,+\infty)$ است، حد آن در همه اعداد مثبت و صفر قابل تعریف است، ولی در اعداد منفی حد آن تابع قابل تعریف نیست.

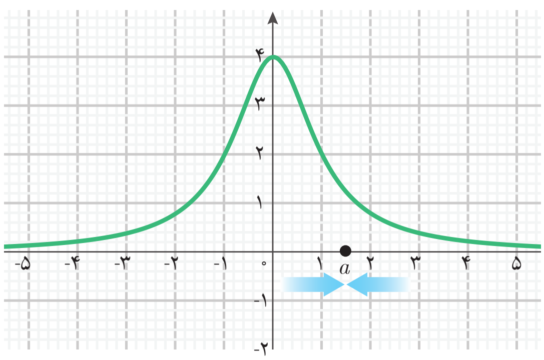
حمید گفت: ولی من منظور از نزدیک شدن به یک نقطه را درست متوجه نشدم. چه اندازه از نزدیک شدن کافی است؟ فاصله از نقطه چقدر باید کوچک باشد؟ آیا مثلاً نزدیک شدن به اندازهٔ ۰/۰۰۱ یا ۰/۰۰۰۱ یا ۰/۰۰۰۰۱ یا یک عدد کوچک‌تر دیگر، کافی است؟

دبیر گفت: نه، منظور از نزدیک شدن، آن نیست که به اندازهٔ عدد خاصی نزدیک شویم. منظور از نزدیک شدن آن است که به هر اندازه که بخواهیم، بتوانیم به آن نقطه نزدیک شویم. مثلاً از داخل بازهٔ $(\circ,+\infty)$ به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به ۱ نزدیک شویم.

مثال ۳

حد تابع $g(x)=\dfrac{۴}{x^{۲}+۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در چه نقاطی قابل تعریف است؟

دامنهٔ این تابع، تمام اعداد حقیقی است. پس، از دامنهٔ این تابع به هر نقطه مانند a می‌توان نزدیک شد. بنابراین، حد این تابع در همهٔ نقاط قابل تعریف است. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است و مثلاً نزدیک شدن به یک نقطه مانند a، از نقاط دامنهٔ تابع، نمایش داده شده است.

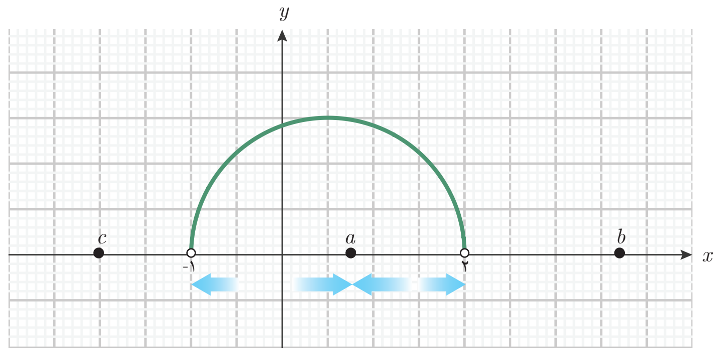


مثال ۴

حد تابع $f(x)=\sqrt{(x+۱)(۲-x)}$ با دامنهٔ $(-۱,۲)$ در چه نقاطی قابل تعریف است و در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟

نمودار این تابع به شکل صفحه بعد است. همان‌طور که از روی شکل دیده می‌شود، از نقاط دامنهٔ این تابع به همهٔ نقاط بازهٔ $(-۱,۲)$ از دو طرف می‌توان نزدیک شد (مانند نقطهٔ a که در شکل نشان داده

شده است). به نقطهٔ ۲ فقط از سمت چپ می‌توان نزدیک شد و به ۱- فقط از سمت راست می‌توان نزدیک شد. بنابراین، حد این تابع در تمام نقاط بازهٔ [۱,۲-] قابل تعریف است. ولی از نقاط دامنهٔ این تابع نمی‌توان به نقاطی مانند b و c (در شکل زیر) که خارج از بازهٔ [۱,۲-] هستند، نزدیک شد. بنابراین حد این تابع برای نقاط خارج از بازهٔ [۱,۲-] قابل تعریف نیست.



به طور کلی در ریاضی، حد تابع‌ها به شکل زیر تعریف می‌شود:

تعریف

حد تابع

فرض کنید f یک تابع و a نقطه‌ای باشد که بتوان از نقاط دامنهٔ تابع f [1] (به اندازهٔ دلخواه) به آن نزدیک شد. در این حالت می‌گوییم حد f در نقطهٔ a **قابل تعریف** است.

اگر حد f در نقطهٔ a قابل تعریف باشد و با نزدیک شدن مقادیر متغیر x (از نقاط دامنهٔ f) به a که $x \neq a$، مقادیر $f(x)$ به عددی مانند L نزدیک شوند[2]، می‌گوییم حد تابع f در نقطهٔ a برابر عدد L است.

این عمل را **حدگیری از تابع f در نقطهٔ a**، و a را **نقطهٔ حدگیری** می‌نامند.

در عمل حدگیری از یک تابع f، مقادیر $f(x)$ نمی‌توانند هم‌زمان به دو عدد مختلف نزدیک شوند، بنابراین حد یک تابع در یک نقطه، در صورت وجود، یکتاست.

۱ـ در این کتاب فرض بر آن است که هرگاه از حد یک تابع صحبت می‌کنیم دامنهٔ آن به صورت یک بازه یا اجتماع چند بازه است.

۲ـ توجه داشته باشید که نزدیک شدن $f(x)$ به L نیز باید به اندازهٔ دلخواه باشد، یعنی با نزدیک کردن x به a (به اندازهٔ کافی) باید $f(x)$ را به L، به هر اندازه که بخواهیم نزدیک سازیم .

برای مثال، حد تابع $f(x)=\sqrt{(x+۱)(۲-x)}$ با دامنهٔ $(-۱,۲)$ را در نظر بگیرید حد این تابع در نقاط بازهٔ $[-۱,۲]$ قابل تعریف است ولی برای نقاط خارج از این بازه، حد این تابع قابل تعریف نیست.

کار در کلاس ۱

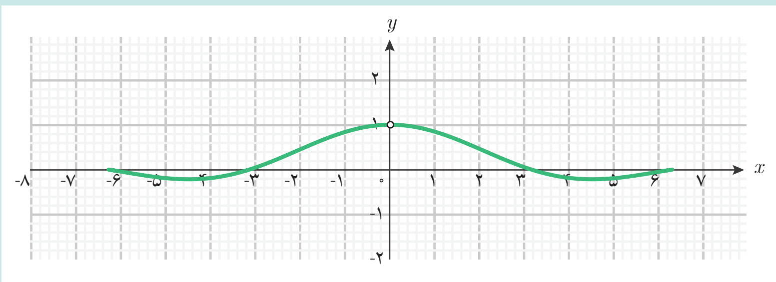
تابع $S(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $(-۲\pi\ ,\ ۲\pi)-\{۰\}$ را در نظر بگیرید.

الف) دامنهٔ این تابع را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید و توضیح دهید چرا نزدیک شدن به صفر از نقاط دامنهٔ این تابع از دو طرف انجام می‌شود.

ب) جدول زیر را کامل کنید و حد این تابع را در صفر حدس بزنید.

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	$\to$ ۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$S(x)$	۰/۹۹۸	...	...	$\to$? $\leftarrow$	...	...	۰/۹۹۸

پ) نمودار این تابع به شکل زیر است. درستی حدس خود را از طریق نمودار بررسی کنید.



ت) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

گفتگو

پس از آنکه سعید فهمید در چه نقاطی می‌توان حد یک تابع را تعریف کرد، سؤالی برای او پیش آمد.

سعید پرسید: در محاسبهٔ حد یک تابع در یک نقطه، از کجا معلوم است که مقادیر تابع حتماً به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟

دبیر گفت: وقتی حد یک تابع را در یک نقطه بررسی می‌کنیم، لزومی ندارد حتماً مقادیر تابع به عدد خاصی نزدیک شوند. ممکن است مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نشوند. در این حالت می‌گویند تابع در آن نقطه حد ندارد.

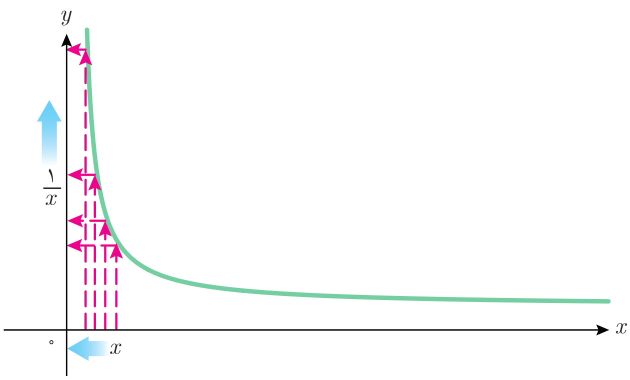
سعید گفت: پس آیا می‌توان گفت که اگر حد یک تابع در یک نقطه قابل تعریف باشد، ممکن است تابع در آن نقطه حد نداشته باشد؟

دبیر گفت: بله، **قابل تعریف بودن حد تابع در یک نقطه به معنای وجود حد در آن نقطه نیست.** برای مثال،

حد تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $(۰,+\infty)$ را در صفر بررسی می‌کنیم. ابتدا جدول مقادیر تابع را در برخی نقاط نزدیک صفر تشکیل می‌دهیم. از آنجا که دامنهٔ تابع فقط نقاط سمت راست صفر را در بردارد، فقط نقاط نزدیک صفر را که سمت راست صفر قرار دارند، در جدول قرار می‌دهیم.

x	$۰ \leftarrow$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	$? \leftarrow$	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰	۱۰۰	۱۰

این جدول نشان می‌دهد که هر چه x به صفر (با مقادیر مثبت) نزدیک‌تر می‌شود، مقادیر $\frac{۱}{x}$ بزرگ‌تر می‌شوند. نمودار این تابع نیز همین مطلب را نشان می‌دهد. آیا در این وضعیت، مقادیر $\frac{۱}{x}$ به عدد خاصی نزدیک می‌شوند؟



سعید گفت: خیر، چون مقادیر $\frac{۱}{x}$ در حال بزرگ شدن هستند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند.

بنابراین، تابع با قانون $\frac{۱}{x}$ و دامنهٔ $(۰,+\infty)$ در صفر، حد ندارد.

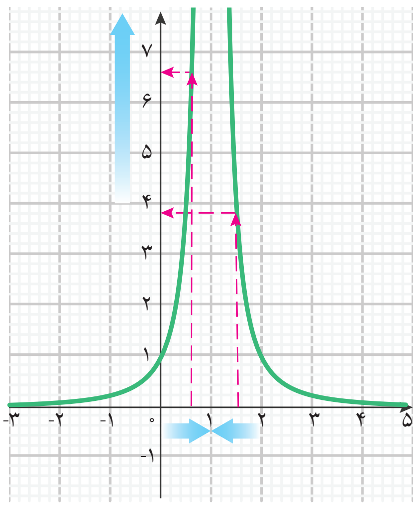
مثال ۵

آیا تابع $g(x)=\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۱\}$ در $x=۱$، حد دارد؟

دامنهٔ این تابع به صورت $(-\infty,۱)\cup(۱,+\infty)$ است و می‌توان از دو طرف از نقاط دامنهٔ تابع به ۱ نزدیک شد. بنابراین، جدول مقادیر این تابع را در نزدیک ۱ به شکل زیر تشکیل می‌دهیم.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\rightarrow$ ۱ $\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$g(x)$	۱۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰۰۰۰۰	$\rightarrow ? \leftarrow$	۱۰۰۰۰۰۰	۱۰۰۰۰	۱۰۰

این جدول نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x به ۱، مقادیر $\dfrac{۱}{(x-۱)^{۲}}$ بزرگ می‌شوند و به هیچ عدد خاصی نزدیک نمی‌شوند. نمودار این تابع نیز همین مطلب را نشان می‌دهد.



بنابراین، این تابع در $x=۱$ حد ندارد.

در این مثال‌ها دیدیم که **ممکن است حد یک تابع مانند f در یک نقطه مانند a قابل تعریف باشد، ولی با نزدیک شدن x از نقاط دامنهٔ f به a $(x\neq a)$، مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند. در این حالت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a حد ندارد.**

کار در کلاس ۲

موارد الف و ب را برای هر یک از تابع‌های $h(x)$ ، $g(t)$ و $f(x)$ بررسی کنید.

الف) آیا حد تابع در صفر قابل تعریف است؟

ب) در صورت قابل تعریف بودن، وجود حد و مقدار آن را (در صورت وجود) با کامل کردن جدول و رسم نمودار به کمک جئوجبرا، بررسی کنید.

۱ تابع $h(x) = \sin x$ با دامنهٔ $(-\pi , \pi)$

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	$\to$ ۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$\sin(x)$	-۰/۰۹۹	۰/۰۰۹	...	$\to ? \leftarrow$	...	۰/۰۰۹	۰/۰۹۹

۲ تابع $g(t) = \dfrac{\sqrt{t^2 + t}}{t}$ با دامنهٔ $(۰,۴)$

t	۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$g(t)$	? $\leftarrow$	...	۳۱/۶۴	۱۰/۰۵	۳/۳۲

۳ تابع $f(x) = \dfrac{\sqrt{x^4 + x^6}}{x^2}$ با دامنهٔ $(-۵ , ۵) - \{۰\}$

x	-۰/۱	-۰/۰۱	-۰/۰۰۱	$\to$ ۰ $\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$f(x)$	۱/۰۰۴	...	...	$\to ? \leftarrow$	...	۱/۰۰۰۰۴	۱/۰۰۴

برای نمایش حد یک تابع از نماد lim استفاده می‌شود[۱]. برای بیان حد تابع $f(x)$، از عبارت $\lim f(x)$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه حد یک تابع در یک نقطه (نقطهٔ حدگیری)، تعریف و محاسبه می‌شود،

۱ـ lim ابتدای کلمهٔ limit است. این کلمه در زبان انگلیسی به معنای حد و مرز است.

نقطهٔ حدگیری نیز باید در نماد حد، نمایش داده شود. برای مثال، اگر حدگیری در نقطه‌ای مانند a انجام شود، از نماد $x \to a$ برای بیان این مطلب استفاده می‌شود که نشانگر آن است که x (متغیر تابع) در حال نزدیک شدن به a (میل کردن به a) است. نماد $x \to a$ را در زیر نماد lim می‌نویسند. به‌عبارت دیگر:

> حد تابع f در نقطهٔ a به صورت $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ نمایش داده می‌شود.

از آنجا که نماد $x \to a$ نشانگر میل کردن x به a است، $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ به صورت «حد $f(x)$ وقتی x به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

مثال ۶

اگر حد تابع با قانون $x+۲$ و دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۳$ با تشکیل جدول پیدا کنیم، برابر ۵ می‌شود.

x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	$\to ۳ \leftarrow$	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$x+۲$	۴/۹	۴/۹۹	۴/۹۹۹	$\to ۵ \leftarrow$	۵/۰۰۱	۵/۰۱	۵/۱

بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \to ۳} (x+۲) = ۵$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $x+۲$ وقتی x به ۳ میل می‌کند، برابر ۵ است».

مثال ۷

در کار در کلاس (۱) حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $(-۲\pi, ۲\pi) - \{۰\}$ را در $x=۰$ محاسبه کردید. مقدار این حد برابر ۱ بود، بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\sin x}{x} = ۱$$

عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $\frac{\sin x}{x}$ وقتی x به صفر میل می‌کند، برابر ۱ است».

مثال ۸

در مثال (۲) دیدیم حد تابع $g(x)=\dfrac{x^۲-x-۲}{x-۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ در نقطهٔ $x=۲$ برابر ۳ است. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-x-۲}{x-۲}=۳$$

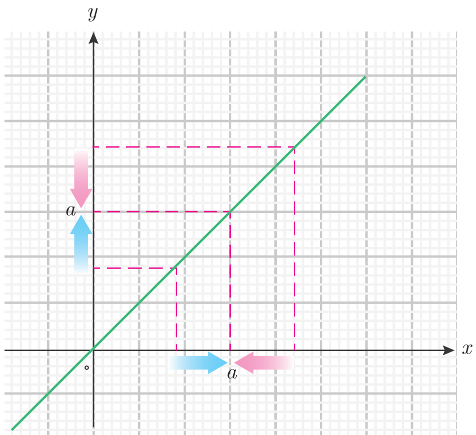
عبارت بالا را به صورت زیر می‌خوانیم:

«حد تابع $\dfrac{x^۲-x-۲}{x-۲}$ وقتی x به ۲ میل می‌کند، برابر ۳ است.»

مثال ۹

تابع $f(x)=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مقدار تابع در هر نقطه مانند x، همان x است. بنابراین، با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a، مقادیر $f(x)$ (که همان x است) نیز به a نزدیک می‌شوند.

برای مثال در نقطه ۳ جدول این تابع در نزدیکی این نقطه به شکل زیر است.



x	۲/۹	۲/۹۹	$\to$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)=x$	۲/۹	۲/۹۹	$\to$ ۳ $\leftarrow$	۳/۰۱	۳/۱

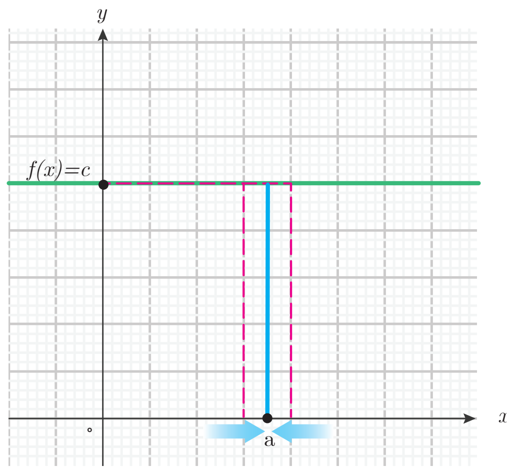
بنابراین $\lim\limits_{x\to ۳} = ۳$

به طور کلی حد این تابع در همهٔ نقاط وجود دارد و می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x\to a} x = a$$

مثال ۱۰

تابع ثابت $f(x)=c$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید.
نمودار این تابع نشان می‌دهد که با نزدیک شدن x به هر نقطه‌ای مانند a (شکل روبه‌رو)، مقادیر $f(x)$ همان مقدار ثابت c است.



$\boldsymbol{x}$	x	$\rightarrow a \leftarrow$	x
$\boldsymbol{f(x)=c}$	c	$\rightarrow c \leftarrow$	c

در این وضعیت حد این تابع همان c است؛ یعنی حد تابع ثابت در هر نقطه‌ای وجود دارد و برابر همان مقدار ثابت است. بنابراین،

$$\lim_{x\to a} c = c$$

کار در کلاس ۳

با استفاده از نماد حد، حد تابع‌های زیر را به زبان ریاضی بنویسید.

الف) حد تابع $۳x-۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $x=۲$ برابر ۵ است.

ب) حد تابع $g(x)=\dfrac{x}{x+۱}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۱)$ در $x=-۳$ برابر $\dfrac{۳}{۲}$ است.

پ) حد تابع $\sqrt{x^{۲}-۱}$ با دامنهٔ $(۱,+\infty)$ در $x=۱$ برابر صفر است.

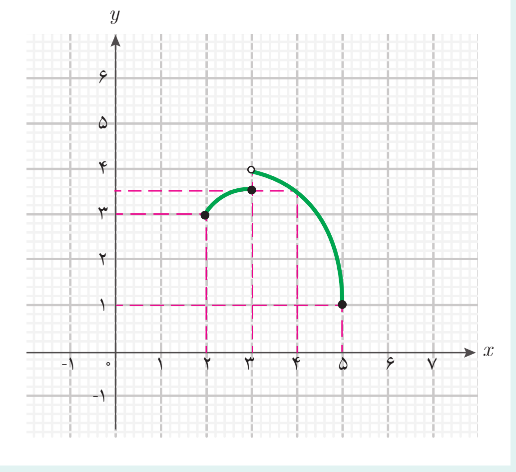
ت) حد تابع ثابت با مقدار ۸ در $x=-۱$ برابر ۸ است.

مسائل

۱ شکل روبه‌رو، نمودار تابع h را نشان می‌دهد.

الف) در کدام‌یک از نقاط ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ حد این تابع قابل تعریف است؟ چرا؟

ب) در کدام یک از نقاط ۳، ۴، ۵ حد این تابع موجود است؟ حد این تابع در این نقاط را در صورت وجود بیابید و با نماد حد بنویسید.



۲ حدهای زیر را به زبان فارسی بیان کنید. دامنهٔ این تابع‌ها را بازهٔ $(۰,+\infty)$ در نظر بگیرید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۰}\sqrt{x}=۰$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۴}}\frac{۱}{x}=۴$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\sin x=۱$

۳ تابع $f(x)=\frac{x^۲}{۴-x^۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۲\}$ را در نظر بگیرید. حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

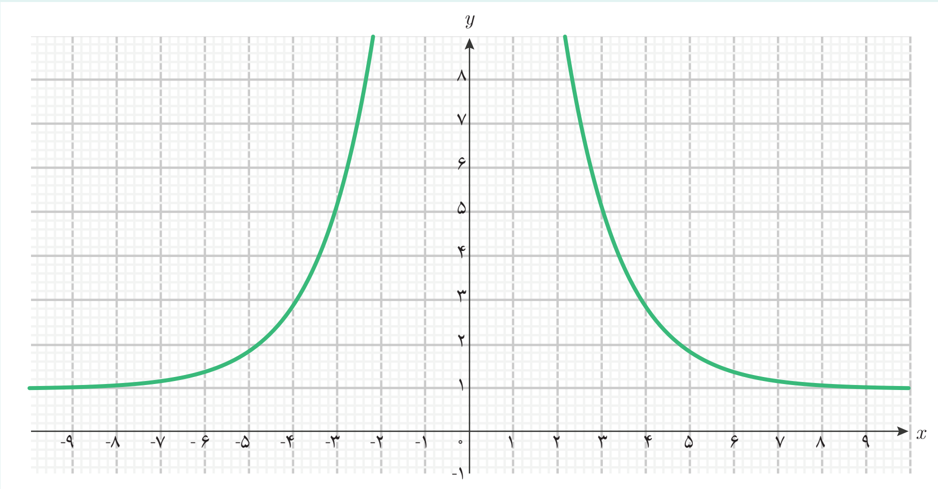
۴ تابع $f(x)=\frac{\sqrt{x-۲}}{x-۲}$ را با دامنهٔ $(۲,+\infty)$ در نظر بگیرید. حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟ به کمک تشکیل جدول این تابع در نزدیک ۲، وجود حد این تابع در $x=۲$ را بررسی کنید.

۵ تابعی خطی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و حد آن را در ۱ بررسی کنید. آیا حد این تابع در هر نقطهٔ دیگری هم وجود دارد؟

۶ تابع $g(x)=\dfrac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۴}}$ با دامنهٔ $(-\infty,-۲)\cup(۲,+\infty)$ را در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف است؟

ب) نمودار این تابع به شکل زیر است. حدس بزنید حد این تابع در چه نقاطی وجود دارد و در چه نقاطی وجود ندارد؟



۷ تابع $g(x)=۱+\sqrt{x}$ با دامنهٔ $[۰,+\infty)$ را در نظر بگیرید.

الف) با تشکیل جدول این تابع در نزدیکی‌های ۴ حد این تابع را در ۴ بیابید و با نماد حد بنویسید.

ب) حد این تابع در چه نقاطی قابل تعریف نیست؟

پ) با رسم نمودار این تابع به کمک جئوجبرا مشخص کنید، حد این تابع در چه نقاطی وجود دارد و در چه نقاطی وجود ندارد.

۸ آیا حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{۲-x}$ با دامنهٔ $(-\infty,۲)$ در ۲ قابل تعریف است؟ با تشکیل جدول و رسم نمودار این تابع، حد آن را در ۲، در صورت وجود، بیابید و با نماد حد بنویسید.

۲ـ محاسبهٔ حد تابع‌ها

با یادگیری مفهوم حد، سعید به دنبال جواب این سؤال بود که حد را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟

سعید گفت: برای یافتن حد یک تابع، ما مقادیر تابع را در نزدیک نقطهٔ حدگیری به کمک قانون تابع، محاسبه می‌کردیم و با استفاده از این مقادیر، حد تابع را حدس می‌زدیم. از کجا معلوم، حدس ما درست باشد؟ آیا روش‌های دیگری برای یافتن حد تابع‌ها داریم؟

دبیر گفت: سؤال خوبی است. ما نمی‌توانیم فقط به حدس خود اطمینان کنیم. روش‌هایی برای محاسبهٔ حد تابع‌ها وجود دارند که به کمک آنها، حد بسیاری از تابع‌ها را می‌توان محاسبه کرد. برای مثال، اگر تابعی از جمع یا ضرب تابع‌های ساده‌تر ساخته شده باشد، می‌توانیم از حد همان تابع‌های ساده‌تر برای محاسبهٔ حد آن تابع استفاده کنیم.

فعالیت زیر یکی از این روش‌های محاسبهٔ حد را با یک مثال نشان می‌دهد.

فعالیت ۲

دو تابع $f(x)=\sqrt{x}$ و $g(x)=\frac{x}{۴}$ را با دامنهٔ یکسان (۰,۴) در نظر بگیرید. مجموع این دو تابع را به صورت $h(x)=\frac{x}{۴}+\sqrt{x}$ نشان می‌دهیم که دامنهٔ آن همان بازهٔ (۰,۴) است.

۱ جدول زیر را برای یافتن حد سه تابع f و g و h در نقطهٔ ۴ کامل کنید.

x	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	$\to$ ۴
$f(x)$	۱/۷۳۲	۱/۸۷۰	۱/۹۷۴	...	...	$\to$?
$g(x)$	۰/۷۵۰	۰/۸۷۵	۰/۹۷۵	...	...	$\to$?
$h(x)$	۲/۴۸۲	۲/۷۴۵	۲/۹۴۹	...	...	$\to$?

۲ حد هر تابع را در نقطهٔ ۴ جداگانه به‌دست آورید. چه رابطه‌ای بین حد این سه تابع در نقطهٔ ۴ می‌یابید؟

۳ جدول زیر را برای یافتن حد این سه تابع در نقطهٔ ۱ کامل کنید.

x	۰/۹	۰/۹۹	۰/۹۹۹	$\to$ ۱ $\leftarrow$	۱/۰۰۱	۱/۰۱	۱/۱
$f(x)$	۰/۹۴۸	۰/۹۹۴	...	$\to$? $\leftarrow$	۱/۰۰۰	۱/۰۰۴	۱/۰۴۸
$g(x)$	۰/۲۲۵	۰/۲۴۷	۰/۲۴۹	$\to$? $\leftarrow$	...	۰/۲۵۲	۰/۲۷۵
$h(x)$	۱/۱۷۳	۱/۲۴۱	...	$\to$? $\leftarrow$	...	۱/۲۵۶	۱/۳۲۳

۴ حد هر تابع در نقطهٔ ۱ را جداگانه به‌دست آورید. چه رابطه‌ای بین حد این سه تابع در نقطهٔ ۱ می‌یابید؟

۵ در حالت کلی بین حد دو تابع و حد مجموع آن دو تابع (در یک نقطهٔ مشخص) چه رابطه‌ای را حدس می‌زنید؟

در این فعالیت، دو تابع مشخص f و g با دامنهٔ یکسان ارائه شده‌اند. با جمع قانون‌های f و g تابع دیگری با همان دامنهٔ مشترک این دو تابع به‌دست می‌آید (تابع h). در حالت کلی با جمع هر دو تابع دلخواه که دامنهٔ یکسانی دارند، می‌توانیم تابعی با همان دامنهٔ مشترک آنها به‌دست آوریم. این عمل را **جمع کردن تابع‌ها** می‌نامند. در این فعالیت حد مجموع این دو تابع در یک نقطهٔ مشخص بررسی شد. دیدیم که با نزدیک شدن x به ۱، مقادیر $f(x)$ به ۱ و مقادیر $g(x)$ به $\frac{۱}{۴}$ نزدیک می‌شوند، بنابراین مقادیر $f(x)+g(x)$ به $۱+\frac{۱}{۴}$ نزدیک می‌شوند. این بررسی نشان می‌دهد که **حد مجموع این دو تابع در یک نقطه برابر با مجموع حدهای این دو تابع در همان نقطه است.**

به طور کلی اگر حد دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در نقطهٔ a به ترتیب $L_۱$ و $L_۲$ باشند، به عبارت دیگر با نزدیک شدن x به a، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ و مقادیر $g(x)$ به $L_۲$ نزدیک شوند، مقادیر $f(x)+g(x)$ به $L_۱+L_۲$ نزدیک می‌شوند. پس، می‌توانیم نتیجه بگیریم مجموع دو تابع f و g نیز در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $L_۱+L_۲$ است.

تابع‌های با دامنهٔ یکسان را می‌توان در هم ضرب کرد و تابع دیگری با همان دامنهٔ مشترک به‌دست آورد. این عمل را **ضرب تابع‌ها** می‌نامند. برای ضرب دو تابع f و g نیز نتیجه مشابهی به‌دست می‌آید: اگر با نزدیک شدن x به نقطهٔ a، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ و مقادیر $g(x)$ به $L_۲$ نزدیک شوند، مقادیر $f(x).g(x)$ به $L_۱L_۲$ نزدیک می‌شوند. پس می‌توانیم نتیجه بگیریم حاصل ضرب دو تابع f و g نیز در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $L_۱L_۲$ است.

با استفاده از نماد حد تابع، می‌توانیم حد مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع را به شکل زیر بنویسیم.

حد مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع

اگر دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در $x=a$ حد داشته باشند، آنگاه مجموع و حاصل‌ضرب‌های این دو تابع نیز در a حد دارند و

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f(x).g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)$$

وضعیت تفاضل تابع‌ها نیز مشابه جمع تابع‌هاست و حد تفاضل دو تابع (با دامنهٔ یکسان) در یک نقطه، برابر است با تفاضل حد آن دو تابع در آن نقطه، یعنی:

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)$$

برای جمع سه تابع (یا بیشتر) نیز حد مجموع آنها در یک نقطه، برابر مجموع حد آن تابع‌ها در آن نقطه است. همچنین، برای ضرب سه تابع (یا بیشتر) نیز حد حاصل ضرب آنها، در یک نقطه، برابر حاصل‌ضرب حد آن تابع‌ها در آن نقطه است.

مثال ۱۱

حد تابع $f(x)=x^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=-۲$ به‌دست آورید.

این تابع به صورت ضرب تابع $g(x)=x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در خودش است و داریم $\lim_{x\to -۲} x=-۲$، بنابراین:

$$\lim_{x\to -۲} x^{۲}=\lim_{x\to -۲}(x.x)=(\lim_{x\to -۲} x)(\lim_{x\to -۲} x)=(-۲)(-۲)=۴$$

مثال ۱۲

حد تابع $f(x) = x^۲$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

طبق مثال (۹)، داریم $\lim\limits_{x \to a} x = a$ و می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \to a} x^۲ = \lim_{x \to a} (x.x) = (\lim_{x \to a} x)(\lim_{x \to a} x) = a.a = a^۲$$

مثال ۱۳

حد تابع $k(x) = ۶x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۲$ به‌دست آورید.

تابع $k(x)$ به صورت ضرب تابع $g(x) = x$ در تابع ثابت $f(x) = ۶$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \to ۲} ۶x = (\lim_{x \to ۲} ۶)(\lim_{x \to ۲} x) = ۶ \times ۲ = ۱۲$$

مثال ۱۴

حد تابع $f(x) = x^۲ + x - ۵$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=۲$ به‌دست آورید.

این تابع به صورت مجموع سه تابع $g(x) = x^۲$ و $h(x) = x$ و تابع ثابت $k(x) = -۵$ است. بنابراین:

$$\lim_{x \to ۲} (x^۲ + x - ۵) = \lim_{x \to ۲} x^۲ + \lim_{x \to ۲} x + \lim_{x \to ۲} (-۵) = ۲^۲ + ۲ - ۵ = ۱$$

مثال ۱۵

حد تابع $h(x) = x^۳$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

اگر تابع $g(x) = x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را سه بار در خودش ضرب کنیم، تابع h به‌دست می‌آید. پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \to a} x^۳ = \lim_{x \to a} (x.x.x) = (\lim_{x \to a} x)(\lim_{x \to a} x)(\lim_{x \to a} x) = a.a.a = a^۳$$

کار در کلاس ۴

الف) حد تابع $f(x) = x^۳ - ۵x^۲$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در $x=-۱$ به‌دست آورید.

ب) حد تابع $f(x) = x^۳ - ۵x^۲$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در یک نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

گفتگو

سعید گفت: در تمام مثال‌هایی که تاکنون از تابع‌های چندجمله‌ای دیدیم، حد آنها در هر نقطه، همان مقدار تابع در آن نقطه بود. آیا این مطلب برای همهٔ تابع‌های چندجمله‌ای درست است؟

دبیر گفت: به نکتهٔ خوبی توجه کردی. فعالیت زیر می‌تواند جوابی برای سؤال شما فراهم کند.

فعالیت ۳

۱ با به‌دست آوردن حد تابع‌های داده‌شده، جدول زیر را کامل کنید. دامنهٔ این تابع‌ها $\mathbb{R}$ می‌باشند.

$f(x)$	x	$x^۲$	$x^۳$	$x^۴$	$x^۵$	$x^۶$	x^n
$\lim\limits_{x\to a} f(x)$	a	$a^۲$	$a^۳$				

۲ توضیح دهید چرا برای تابع چندجمله‌ای $f(x) = bx^n$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ برای یک نقطهٔ دلخواه a داریم:

$$\lim_{x\to a} bx^n = ba^n$$

۳ حد تابع چندجمله‌ای $P(x) = ۴x^۵ - ۳x^۳ + ۷x - ۴$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

در این فعالیت، ابتدا حد تابع‌هایی به صورت x^n را در نقاط دلخواه به کمک حد حاصل ضرب تابع‌ها به‌دست آوردیم. سپس، حد تابع‌هایی به صورت bx^n را در نقاط دلخواه به‌دست آوردیم. سپس، برای یک چندجمله‌ای خاص، به کمک حد مجموع تابع‌ها، مشاهده کردیم که حد آن تابع چندجمله‌ای در هر نقطه‌ای برابر با مقدار آن تابع در آن نقطه است. این مطلب برای هر تابع چندجمله‌ای دلخواهی برقرار است.

برای هر تابع چندجمله‌ای مانند $P(x)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ برای یک نقطهٔ دلخواه a داریم:

$$\lim_{x\to a} P(x) = P(a)$$

گفتگو

سعید پرسید: دیدیم که تابع‌ها را می‌توانیم با هم جمع یا در هم ضرب کنیم و تابع جدیدی به‌دست آوریم.
آیا تابع‌ها را می‌توانیم بر هم تقسیم کنیم؟

دبیر گفت: بله، تقسیم تابع‌ها نیز همانند ضرب تابع‌هاست. ولی باید دقت کنیم که مقادیر تابعی که در مخرج قرار می‌گیرد، صفر نباشند. اگر f و g دو تابع با دامنهٔ یکسان D باشند و به ازای هر x در دامنهٔ D داشته باشیم: $g(x)\neq ۰$، آنگاه می‌توانیم تابعی با قانون $\frac{f(x)}{g(x)}$ و دامنهٔ D بسازیم که آن را تابع تقسیم f بر g می‌نامند. این‌گونه تابع‌ها را **تابع کسری** می‌نامیم و f را تابع صورت کسر و g را تابع مخرج کسر می‌نامند.

سعید پرسید: آیا برای محاسبهٔ حد تقسیم دو تابع نیز روشی داریم؟

دبیر گفت: در موارد خاصی می‌توانیم حد تقسیم دو تابع را هم به‌دست آوریم.

فرض کنید حد دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در نقطهٔ a به ترتیب $L_۱$ و $L_۲$ باشند و $L_۲\neq ۰$. با نزدیک شدن مقادیر x به a، مقادیر $f(x)$ به $L_۱$ و مقادیر $g(x)$ به $L_۲$ نزدیک می‌شوند. بنابراین، مقادیر $\frac{f(x)}{g(x)}$ به $\frac{L_۱}{L_۲}$ نزدیک می‌شوند و می‌توانیم نتیجه بگیریم تابع تقسیم f بر g در نقطهٔ a حد دارد و حد آن $\frac{L_۱}{L_۲}$ است.

حد حاصل تقسیم دو تابع

فرض کنید دو تابع f و g (با دامنهٔ یکسان) در یک نقطه مانند a حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} g(x)\neq ۰$، آنگاه تابع تقسیم f بر g نیز در نقطهٔ a حد دارد و

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

مثال ۱۶

تابع $h(x)=\frac{۳x}{x^۲+۱}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع را در نقطهٔ $x=-۱$ به‌دست آورید.

ب) حد این تابع را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

تابع h به صورت تقسیم تابع $۳x$ بر تابع $x^۲+۱$ در دامنهٔ $\mathbb{R}$ است. حد تابع مخرج در $x=-۱$ برابر ۲ است که عددی ناصفر است. بنابراین:

$$\lim_{x\to -۱}\frac{۳x}{x^۲+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to -۱} ۳x}{\lim\limits_{x\to -۱}(x^۲+۱)}=\frac{-۳}{(-۱)^۲+۱}=-\frac{۳}{۲}$$

اما در نقطهٔ دلخواه a حد تابع مخرج این کسر برابر $a^{۲}+۱$ است که عددی ناصفر است. بنابراین:

$$\lim_{x\to a}\frac{۳x}{x^{۲}+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to a}۳x}{\lim\limits_{x\to a}x^{۲}+۱}=\frac{۳a}{a^{۲}+۱}$$

مثال ۱۷

تابع $g(x)=\dfrac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-۱}$ را با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۱,۱\}$ در نظر بگیرید.

الف) حد این تابع را در $x=۳$ به‌دست آورید.

ب) حد این تابع را در نقطهٔ دلخواه a از دامنهٔ آن به‌دست آورید.

تابع g به صورت تقسیم تابع $x^{۳}+۱$ بر تابع $x^{۲}-۱$ در دامنهٔ داده شده است. در نقطهٔ ۳، حد تابع مخرج برابر ۸ است $(۸\neq ۰)$. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}x^{۳}+۱}{\lim\limits_{x\to ۳}x^{۲}-۱}=\frac{۲۸}{۸}=\frac{۷}{۲}$$

اما در نقطهٔ دلخواه a، حد تابع مخرج این کسر برابر $a^{۲}-۱$ است. چون a در دامنهٔ تابع است نمی‌تواند ۱ یا ۱- باشد و داریم $a\neq \pm۱$. پس، $a^{۲}-۱\neq ۰$. بنابراین:

$$\lim_{x\to a}\frac{x^{۳}+۱}{x^{۲}-۱}=\frac{\lim\limits_{x\to a}x^{۳}+۱}{\lim\limits_{x\to a}x^{۲}-۱}=\frac{a^{۳}+۱}{a^{۲}-۱}$$

گفتگو

سعید پرسید: اگرچه در تقسیم دو تابع، مقادیر تابع مخرج کسر، هیچگاه صفر نمی‌شود، ولی حد آن در یک نقطه ممکن است صفر شود. در این حالت، آیا می‌توانیم در مورد حد آن تابع کسری در آن نقطه، چیزی بگوییم؟

دبیر گفت: در این حالت، بررسی وجود حد و محاسبهٔ حد کمی مشکل‌تر است. باید ببینیم حد تابع صورت کسر در آن نقطه (در صورت وجود) چگونه است. دو حالت ممکن است پیش آید: یا حد صورت کسر صفر است یا حد صورت کسر عددی ناصفر است.

حمید گفت: در حالتی که حد صورت کسر عددی ناصفر باشد، آیا می‌توانیم بگوییم چون عدد ناصفر تقسیم بر صفر، بی‌نهایت است پس تابع کسری در آن نقطه حد ندارد؟

دبیر گفت: خیر، این طوری نباید بگوییم. نباید از تقسیم عدد بر صفر صحبت کنیم، چون این عمل تعریف نشده است. همچنین، بی‌نهایت عدد نیست تا بخواهد با چیزی برابر شود. ولی وقتی حد صورت یک تابع کسری در نقطه‌ای عددی ناصفر و حد تابع مخرج، صفر باشد، می‌توان نتیجه گرفت که تابع کسری در آن نقطهٔ خاص، حد ندارد. زیرا با نزدیک شدن متغیر به آن نقطه، مقادیر تابع به هیچ عدد خاصی نزدیک نخواهند شد.

سعید پرسید: درحالتی که حد تابع صورت و تابع مخرج یک تابع کسری در یک نقطه صفر شوند، دربارهٔ حد آن تابع چه می‌توانیم بگوییم؟

دبیر گفت: در این حالت، وجود یا نبود حد، بستگی به تابع‌های صورت و مخرج آن تابع کسری دارد. ممکن است تابع کسری حد داشته باشد یا نداشته باشد. به همین دلیل این حالت را **مبهم** نامیده‌اند. در این حالت، برای تشخیص وجود یا نبود حد، هر تابع کسری را باید جداگانه بررسی کرد.

مثال ۱۸

حد تابع $\dfrac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱}$ با دامنهٔ $(۰,۱)$ را در $x=۱$ بررسی کنید.

حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=۱$، صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. در این مثال، می‌توانیم تابع‌های صورت و مخرج را به صورت ضرب یک چندجمله‌ای در $x-۱$ بنویسیم و با ساده‌سازی به شکل زیر حد را محاسبه کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^{۲}-۳x+۲}{x^{۲}-۱}=\lim_{x\to ۱}\frac{(x-۱)(x-۲)}{(x-۱)(x+۱)}=\lim_{x\to ۱}\frac{x-۲}{x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۱} x-۲}{\lim\limits_{x\to ۱} x+۱}=\frac{-۱}{۲}$$

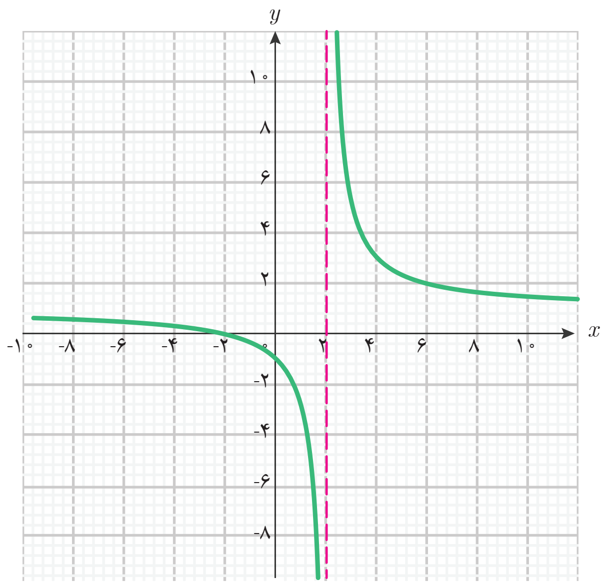
توجه داشته باشید که در محاسبات بالا، مقادیر $x-۱$ همواره ناصفراند (زیرا x هیچ‌گاه برابر ۱ نخواهد شد) پس این عامل را می‌توان از صورت و مخرج ساده کرد. در حالت کلی، وقتی تابع‌های صورت و مخرج چندجمله‌ای باشند و حد هر دو تابع در نقطه‌ای مانند a صفر شوند، می‌توان آنها را به صورت ضرب عواملی در $x-a$ نوشت و عامل $x-a$ را از صورت و مخرج ساده کرد.

مثال ۱۹

حد تابع $\dfrac{x^۲ - ۴}{(x-۲)^۲}$ را با دامنهٔ $(۰,۲)$ در $x=۲$ بررسی کنید.

در این مثال نیز حد تابع صورت و تابع مخرج این کسر در $x=۲$ صفر است و با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. صورت و مخرج را به شکل ضرب عامل‌هایی در x -۲ می‌نویسیم و پس از ساده‌سازی آن، به کسر $\dfrac{x+۲}{x-۲}$ می‌رسیم. پس از این ساده‌سازی، به یک تابع کسری می‌رسیم که حد تابع صورت در نقطهٔ $x=۲$ عددی ناصفر است ولی حد تابع مخرج کسر در این نقطه صفر است. بنابراین تابع کسری داده شده، در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد.

نتیجهٔ به دست آمده را به کمک شکل بهتر می‌توانید بررسی کنید.



مثال ۲۰

حد تابع $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در صفر به‌دست آورید.

تابع f، یک تابع کسری است که حد تابع صورت و تابع مخرج آن در نقطهٔ صفر، برابر صفر است. پس با یک حالت مبهم روبه‌رو هستیم. در اینجا تابع صورت، چندجمله‌ای نیست و نمی‌توانیم از روش

ساده‌سازی استفاده کنیم. اما روش محاسبهٔ مستقیم مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطهٔ حدگیری، همواره قابل انجام است. حد این تابع را با این روش، در «کار در کلاس (۱)» به‌دست آورده‌ایم و دیدیم که این تابع در نقطهٔ صفر حد دارد و حد آن ۱ است.

$$\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}=۱$$

اگر برای محاسبهٔ حد یک تابع، نتوانیم از روش‌هایی مانند ساده‌سازی و روش‌های دیگر استفاده کنیم، همواره می‌توان از روش محاسبهٔ مستقیم مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطهٔ حدگیری استفاده کنیم و با تشکیل جدول مقادیر تابع در نزدیکی‌های نقطهٔ حدگیری، وجود حد، مقدار حد یا نبود حد را حدس بزنیم.

کار در کلاس ۵

وجود حد تابع‌های زیر را در نقاط داده‌شده بررسی کنید. در صورت وجود حد، آن را بیابید و با نماد حد بنویسید.

الف) تابع $\frac{x^۲-۹}{x-۳}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۳\}$ در $x=۳$.

ب) تابع $\frac{(x+۱)\sin x}{x(x+۲)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۲,۰\}$ در $x=۰$ (راهنمایی: این تابع را به صورت ضرب دو تابع مناسب بنویسید).

پ) تابع $\frac{x^۲+x-۴}{x^۲-۱۶}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-۴,۴\}$ در $x=-۴$.

مسائل

۱ حد تابع‌های زیر را در نقطهٔ داده‌شده، در صورت وجود، بیابید.

الف) تابع $g(x) = x^{3}-2x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نقطهٔ دلخواه a.

ب) تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}+1}{x^{2}-1}$ با دامنهٔ $(1,5)$ در نقطهٔ $x=3$ و در نقطهٔ $x=1$.

پ) تابع $h(x)=\dfrac{x-x^{3}}{x+1}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-1\}$ در نقطهٔ دلخواه a.

۲ حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{2}+x-2}{4-x^{2}}$ با دامنهٔ $(-\infty,-2)$ در -2 را در صورت وجود بیابید.

۳ حد تابع $h(x)=\dfrac{x^{2}-x-4}{4+x^{2}}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a بیابید.

۴ تابع $f(x)=\dfrac{x+2}{x^{2}-4}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-2,2\}$ در چه نقاطی حد ندارد؟

۵ تابع $f(x)=\dfrac{x^{2}+x}{x^{2}-x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0,1\}$ را در نظر بگیرید. وجود حد این تابع را در نقاط صفر و ۱ بررسی کنید.

۶ تابع $g(x)=\dfrac{(x+x^{۳})\sin x}{x^{۲}(۱-x)}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰,۱\}$ را در نظر بگیرید.

الف) آیا این تابع در صفر حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

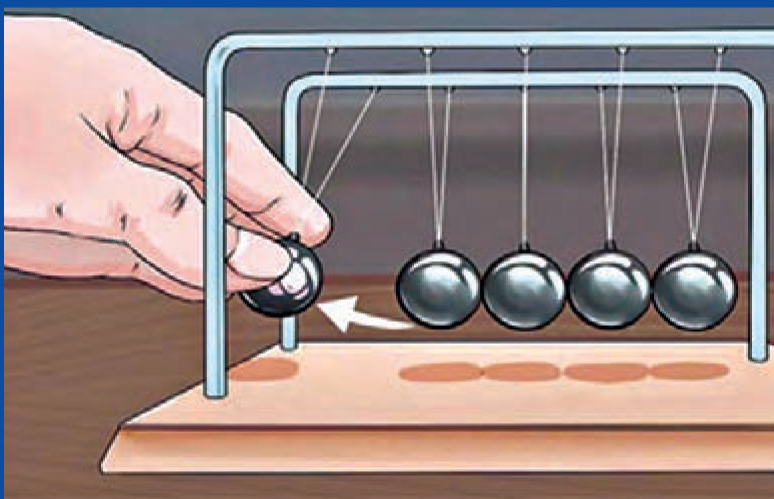
ب) آیا این تابع در ۱ حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.

استانداردهای ارزشیابی پودمان ۲

<table>
<tr><th>عنوان پودمان</th><th>تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)</th><th>استاندارد عملکرد (کیفیت)</th><th>سطوح انتظارات</th><th>شاخص تحقق</th><th>نمره</th></tr>
<tr><td rowspan="3">پودمان دوم: درک مفهوم حد</td><td rowspan="3">انجام محاسبات مربوط به حد تابع‌ها</td><td rowspan="3">حل مسائل مرتبط با حد تابع‌ها</td><td>بالاتر از حد انتظار</td><td>☐ حل مسائل حل‌نشده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با حد تابع‌ها</td><td>۳</td></tr>
<tr><td>در حد انتظار</td><td>☐ حل مسائل مشابه مسائل حل‌شده در کلاس و مشابه کتاب درسی مرتبط با حد تابع‌ها</td><td>۲</td></tr>
<tr><td>پایین تر از حد انتظار</td><td>☐ تشخیص وجود حد و یافتن مقدار آن از روی نمودار و جدول
☐ محاسبه حد مجموع، حاصل‌ضرب و تقسیم تابع‌ها</td><td>۱</td></tr>
<tr><td colspan="5">نمره مستمر از ۵:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">نمره واحد یادگیری از ۳:</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="5">نمره واحد یادگیری از ۲۰:</td><td></td></tr>
</table>

پودمان سوم

مقایسه حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها



اکثر تغییرات کمیت‌ها در طبیعت به‌صورت تدریجی و پیوسته انجام می‌شوند. اما در برخی موارد به نظر می‌رسد این تغییرات ناگهانی و ناپیوسته هستند. برای مثال، سرعت حرکت آونگی که در شکل بالا دیده می‌شود در برخی زمان‌ها به‌طور ناگهانی کم یا زیاد می‌شود. اگر آونگ سمت چپ را به بالا بریم و رها کنیم، سرعت آونگ به‌طور تدریجی و پیوسته افزایش می‌یابد، اما با برخورد با آونگ ساکن، به یکباره آونگ سمت چپ می‌ایستد و سرعت آونگ صفر می‌شود. پس از مدتی، مجدداً با برگشت انرژی، این آونگ سرعت می‌گیرد و این حرکت تکرار می‌شود.

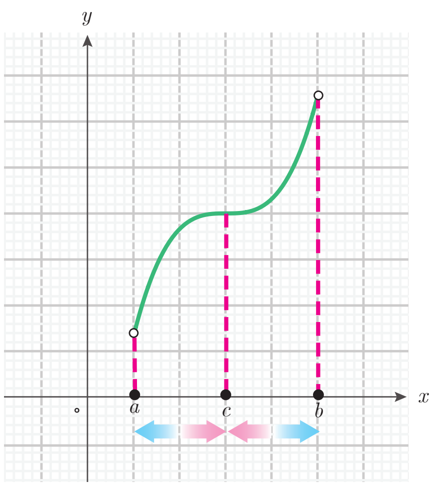
در این مثال، کمیت سرعت آونگ در برخی نقاط تغییرات دفعی و ناپیوسته دارد و در نقاط دیگر تغییرات تدریجی و پیوسته دارد.

۱ـ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه

حمید به هنگام محاسبهٔ حد برخی تابع‌ها به نکتهٔ خاصی پی برد.

حمید پرسید: برای محاسبهٔ حد برخی تابع‌ها در یک نقطه مانند a، می‌توان متغیر x را هم با مقادیر بزرگ‌تر از a و هم با مقادیر کوچک‌تر از آن به a نزدیک کرد. وقتی در محاسبهٔ حد یکی از این تابع‌ها متغیر x را با مقادیر کوچک‌تر از a به آن نزدیک کردم، مقادیر تابع به عدد ۵ نزدیک شدند. ولی وقتی متغیر x را با مقادیر بزرگ‌تر از a به آن نزدیک کردم، مقادیر تابع به عدد ۲ نزدیک شدند. در چنین وضعیتی، حد تابع در a کدام مقدار خواهد بود؟

دبیر گفت: جواب سؤال شما را خواهم داد؛ ولی قبل از صحبت کردن دربارهٔ این وضعیت‌ها، بهتر است این حالت‌ها را نام‌گذاری کنیم. وضعیت نقطهٔ حدگیری نسبت به دامنهٔ یک تابع سه حالت می‌تواند داشته باشد. فرض کنید تابعی در بازهٔ $(a\ ,\ b)$ تعریف شده باشد و c نقطه‌ای از دامنهٔ تابع باشد.



حالت (۱): اگر نقطهٔ حدگیری a باشد، از نقاط دامنهٔ تابع، فقط با مقادیر بزرگ‌تر از a می‌توان به a نزدیک شد.
در این حالت، مقادیر متغیر، فقط سمت راست a خواهند بود. به همین دلیل برای مشخص کردن نوع حدگیری، این نوع حدگیری را **حد یک‌طرفهٔ راست** می‌نامند.

حالت (۲): اگر نقطهٔ حدگیری b باشد، از نقاط دامنهٔ تابع، فقط با مقادیر کوچک‌تر از b می‌توان به b نزدیک شد.
در این حالت، مقادیر متغیر، فقط سمت چپ b خواهند بود. به همین دلیل برای مشخص کردن نوع حدگیری، این نوع حدگیری را **حد یک‌طرفهٔ چپ** می‌نامند.

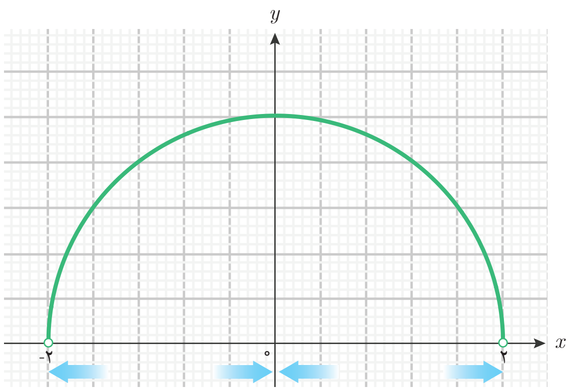
حالت (۳): اگر نقطهٔ حدگیری c باشد، از نقاط دامنهٔ تابع، هم با مقادیر بزرگ‌تر و هم با مقادیر کوچک‌تر از c می‌توان به c نزدیک شد. یعنی دامنهٔ تابع دو طرف نقطهٔ c را در بردارد.
در این حالت، مقادیر متغیر در دو طرف c خواهند بود. به همین دلیل برای مشخص کردن نوع حدگیری، این نوع حدگیری را **حد دوطرفه** می‌نامند.

حمید گفت: پس، آن حدی که من بررسی کردم، یک حد دوطرفه بوده است. در حدهای دوطرفه، اگر یک‌بار متغیر را فقط از چپ و یک بار متغیر را فقط از راست به نقطهٔ حدگیری نزدیک کنیم، ممکن است مقادیر تابع به اعداد متفاوتی نزدیک شوند. دربارهٔ این اعداد چه باید بگوییم؟

دبیر گفت: در حدهای دوطرفه در یک نقطه، اگر متغیر را فقط از سمت چپ به آن نقطه نزدیک کنیم و حدی برای مقادیر تابع به‌دست آوریم، آن را **حد چپ تابع** در آن نقطه می‌نامند. به طور مشابه، اگر متغیر را فقط از سمت راست به آن نقطه نزدیک سازیم و حدی برای مقادیر تابع به‌دست آوریم، آن را **حد راست تابع** در آن نقطه می‌نامند. روشن است که اگر این دو مقدار مساوی نباشند، مقادیر تابع به عدد خاصی نزدیک نشده‌اند و باید بگوییم تابع در این نقطه حد ندارد. اما اگر این دو مقدار مساوی باشند، می‌توانیم بگوییم تابع در این نقطه حد دارد و حد آن همان مقدار یکسان حد چپ و حد راست در آن نقطه است.

مثال ۱

چگونگی حد تابع $f(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ با دامنهٔ $(-۲\,,\,۲)$ را از لحاظ یک‌طرفهٔ چپ و یک‌طرفهٔ راست و دوطرفه بودن، در نقاط ۲ و ۲- و صفر بررسی کنید.



حد این تابع در نقطهٔ ۲-، یک حد یک‌طرفهٔ راست است، زیرا از نقاط دامنهٔ این تابع، فقط از راست می‌توان به ۲- نزدیک شد. اما حد این تابع در نقطهٔ ۲، یک حد یک‌طرفه چپ است. زیرا، از نقاط دامنهٔ این تابع، فقط از چپ می‌توان به ۲ نزدیک شد. حد این تابع در نقطهٔ صفر، یک حد دوطرفه است؛ زیرا از نقاط دامنهٔ این تابع، از دو طرف می‌توان به صفر نزدیک شد.

فرض کنید حدگیری یک تابع f در یک نقطهٔ a دوطرفه باشد. اگر با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنهٔ f) از سمت چپ به a، مقادیر $f(x)$ به عدد $L_۱$ نزدیک شوند، عدد $L_۱$ را حد چپ f در a می‌نامند و با نماد $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ نشان می‌دهند. این نماد به‌صورت «حد چپ f در a» یا «حد $f(x)$ وقتی x از چپ به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

به‌طور مشابه، اگر با نزدیک شدن مقادیر x (در دامنهٔ f) از سمت راست به a، مقادیر $f(x)$ به عدد $L_۲$ نزدیک شوند، عدد $L_۲$ را حد راست f در a می‌نامند و با نماد $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ نشان می‌دهند. این نماد نیز به صورت «حد راست f در a» یا «حد $f(x)$ وقتی x از راست به a میل می‌کند» خوانده می‌شود.

شرط وجود حد دوطرفه در یک نقطه، وجود حد چپ و حد راست در آن نقطه و تساوی این حدهاست. مقدار یکسان این حدها، همان حد تابع در آن نقطه است.

رابطهٔ حدهای دوطرفه با حد چپ و حد راست در یک نقطه

فرض کنید حدگیری f در نقطهٔ a یک حد دوطرفه باشد. وجود حد f در a معادل با آن است که حد چپ و حد راست f در a موجود و مساوی هستند، یعنی:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

مقدار L، همان حد دوطرفهٔ f در a است.

مثال ۲

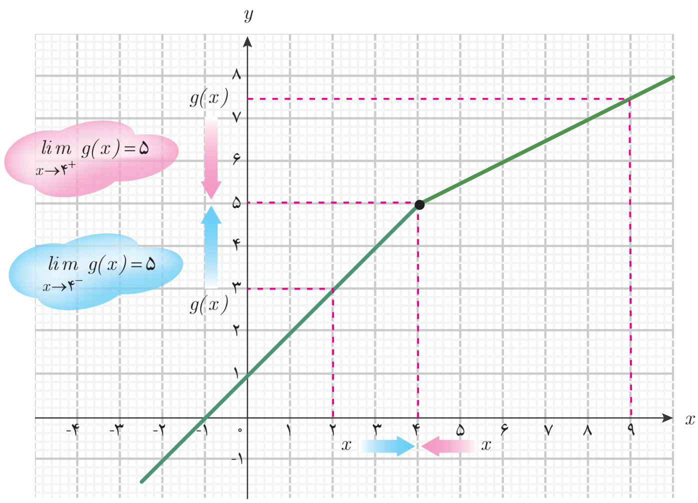
حد چپ و حد راست تابع زیر را (در صورت وجود) در نقطهٔ ۴ به‌دست آورید. آیا این تابع در ۴ حد دارد؟

$$\boldsymbol{g(x)=\begin{cases} x+۱ & x\le ۴ \\ \dfrac{x}{۲}+۳ & ۴<x \end{cases}}$$

با توجه به اینکه قانون تابع در دو طرف ۴ با هم متفاوت است، حد چپ و حد راست در ۴ را جداگانه محاسبه می‌کنیم. قانون این تابع در سمت چپ ۴ به صورت $x+۱$ و در سمت راست ۴ به صورت $\frac{x}{۲}+۳$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۴^-} g(x) = \lim_{x\to ۴^-} (x+۱) = ۵$$

$$\lim_{x\to ۴^+} g(x) = \lim_{x\to ۴^+} (\frac{x}{۲}+۳) = ۵$$



ملاحظه می‌شود حد چپ و حد راست در ۴ مساوی هستند، این تابع در ۴ حد دارد و حد آن عدد ۵ است. نمودار این تابع نیز نشان می‌دهد که با نزدیک شدن متغیر از چپ و از راست به ۴ ، مقادیر تابع به ۵ نزدیک می‌شوند.

مثال ۳

حد چپ و حد راست تابع زیر را (در صورت وجود) در نقطهٔ ۳ به‌دست آورید. آیا تابع در ۳ حد دارد؟

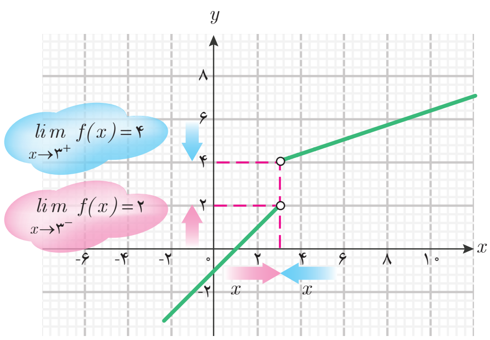
$$f(x)=\begin{cases} x-۱ & x<۳ \\ \dfrac{x}{۳}+۳ & ۳<x \end{cases}$$

قانون این تابع در سمت چپ ۳ به صورت $x - ۱$ و در سمت راست ۳ به صورت $\frac{x}{۳}+۳$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۳^-} f(x)=\lim_{x\to ۳^-}(x-۱)=۲$$

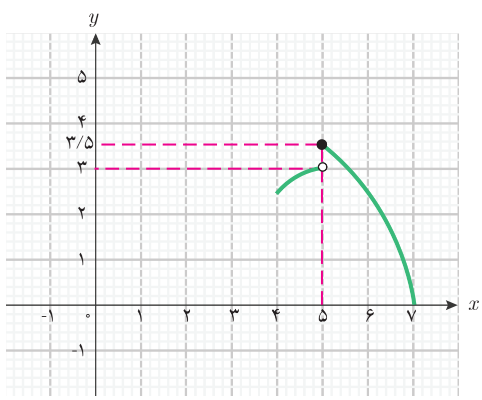
$$\lim_{x\to ۳^+} f(x)=\lim_{x\to ۳^+}(\frac{x}{۳}+۳)=۴$$

با توجه به اینکه حد چپ و حد راست در ۳ مساوی نیستند، این تابع در ۳ حد ندارد. نمودار تابع، تفاوت حد چپ و حد راست در نقطهٔ ۳ را نشان می‌دهد.



مثال ۴

تابع f را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید. حد چپ و حد راست و وجود حد این تابع را در نقطهٔ $x = ۵$ بررسی کنید.



نمودار نشان می‌دهد که وقتی از سمت راست روی محور طول‌ها به ۵ نزدیک می‌شویم، مقدار تابع روی محور عرض‌ها به ۳/۵ نزدیک می‌شود. اما، وقتی از سمت چپ روی محور طول‌ها به ۵ نزدیک می‌شویم،

مقدار تابع روی محور عرض‌ها به ۳ نزدیک می‌شود. بنابراین، این تابع در ۵ حد ندارد ولی حد چپ و حد راست دارد.

$$\lim_{x\to ۵^-} f(x) = ۳$$

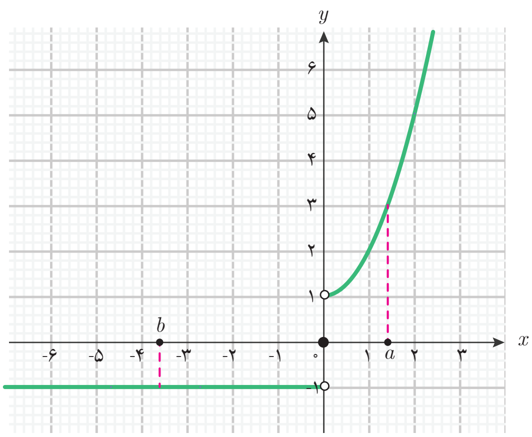
$$\lim_{x\to ۵^+} f(x) = ۳/۵$$

مثال ۵

تابع S را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون زیر در نظر بگیرید.

$$S(x) = \begin{cases} -۱ & x < ۰ \\ ۰ & x = ۰ \\ x^۲ + ۱ & ۰ < x \end{cases}$$

وضعیت حد این تابع را در نقاط ۲، صفر و ۲- تعیین کنید و بیان کنید این تابع در چه نقاطی حد دارد و در چه نقاطی حد ندارد؟



نمودار این تابع مانند شکل روبه‌رو است. اعداد نزدیک نقطهٔ ۲ مثبت هستند و قانون تابع در نزدیک ۲ به صورت $x^۲ + ۱$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲} S(x) = \lim_{x\to ۲} (x^۲ + ۱) = ۵$$

به طور کلی، اگر a یک عدد مثبت باشد، اعداد نزدیک a نیز مثبت خواهند بود و قانون تابع S در نزدیک a به صورت $x^۲ + ۱$ است. پس تابع S در a حد دارد و حد آن برابر $a^۲ + ۱$ است.

اعداد نزدیک نقطهٔ ۲- منفی هستند و قانون تابع در نزدیک ۲- به صورت $S(x) = -۱$ است. بنابراین:

$$\lim_{x\to -۲} S(x) = \lim_{x\to -۲} (-۱) = -۱$$

به طور کلی، اگر b یک عدد منفی باشد، اعداد نزدیک b نیز منفی خواهند بود و تابع S در نزدیک b به صورت تابع ثابت $S(x) = -۱$ است. پس تابع S در b حد دارد و حد آن برابر ۱- است.

اما قانون تابع S در دو طرف صفر با هم متفاوت است. حد چپ و حد راست این تابع را در صفر بررسی

می‌کنیم. در سمت چپ صفر، S تابع ثابت ۱- است. اما، در سمت راست صفر، قانون S به‌صورت $x^۲+۱$ است. پس:

$$\lim_{x\to ۰^-} S(x) = \lim_{x\to ۰^-}(-۱) = -۱$$

$$\lim_{x\to ۰^+} S(x) = \lim_{x\to ۰^+}(x^۲+۱) = ۱$$

با توجه به مساوی نبودن حد چپ و حد راست در صفر، تابع S در صفر حد ندارد.

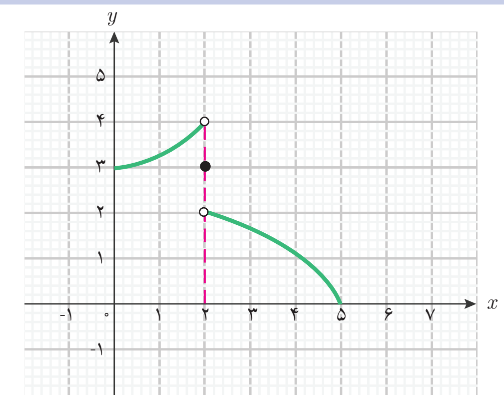
کار در کلاس ۱

تابع‌های زیر را در نظر بگیرید. با بررسی حد چپ و حد راست در نقاط داده شده، وجود حد در این نقاط را بررسی کنید.

الف) $f(x) = \begin{cases} x^۲ + x & x < ۰ \\ ۱ - x & ۰ < x \end{cases}$ در $x = ۰$.

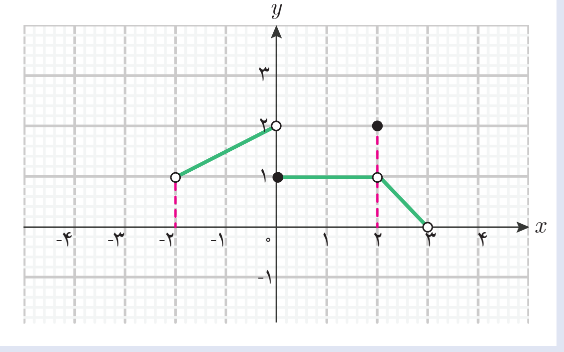
ب) $g(x) = \begin{cases} ۲x - x^۲ & x < ۱ \\ ۵ & x = ۱ \\ ۵x^۲ - ۴x & ۱ < x \end{cases}$ در $x = ۱$.

پ) تابع h با نمودار روبه‌رو در $x = ۲$.



مسائل

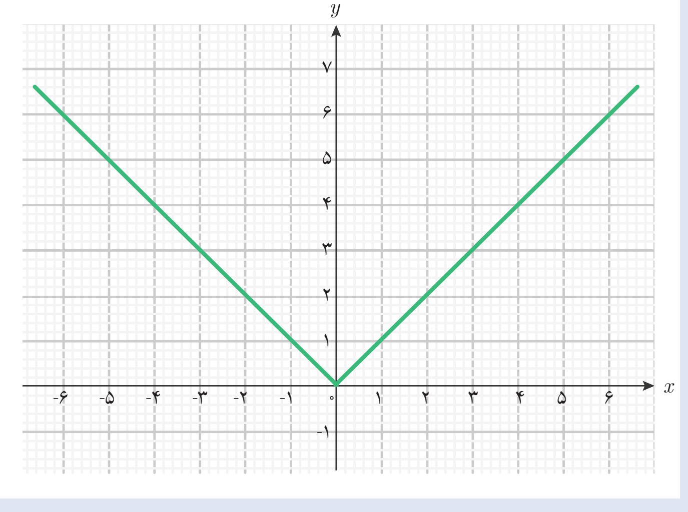
۱ نمودار یک تابع به‌صورت زیر داده شده است. وجود حد این تابع را در نقاط ۲- ، صفر، ۲ و ۳ بررسی کنید.



۲ آیا تابع زیر در $x=۲$ حد دارد؟

$$g(x)=\begin{cases} ۲-x^{۲} & x\leq ۲ \\ x-۴ & ۲<x \end{cases}$$

۳ نمودار تابع $f(x)=|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. آیا این تابع در صفر حد دارد؟ حد آن را در صورت وجود بیابید.



۴ تابع دو ضابطه‌ای زیر را در نظر بگیرید.

$$g(x)=\begin{cases} ax+۲ & x<-۱ \\ x^{۲}+a & -۱<x \end{cases}$$

الف) آیا این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ حد چپ و حد راست دارد؟

ب) a را به گونه‌ای تعیین کنید که این تابع در نقطهٔ $x=-۱$ حد داشته باشد.

۵ نمودار تابعی را رسم کنید که دامنهٔ آن بازهٔ $[۰ , ۵]$ باشد و حد چپ و حد راست در نقطهٔ $x=۴$ آن با هم متفاوت باشند.

۶ تابعی با دامنهٔ $\mathbb{R}$ معرفی کنید که حد چپ آن در نقطهٔ ۲ برابر ۱- و حد راست آن در نقطهٔ ۲، برابر ۵ باشد.

۷ تابعی دو ضابطه‌ای بنویسید که در صفر حد راست داشته باشد، ولی در صفر حد چپ نداشته باشد.

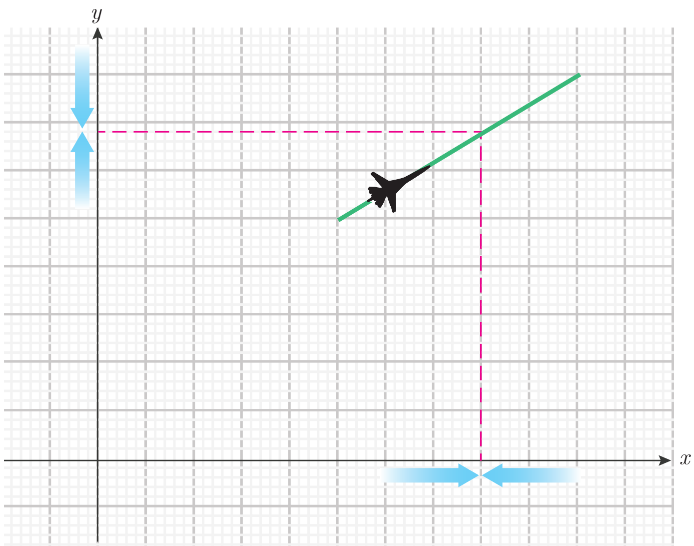
۲ــ پیوستگی تابع‌ها

امروز، حمید سؤال جالب توجهی را مطرح کرد.

حمید گفت: در مسئلهٔ یافتن ارتفاع هواپیما در لحظهٔ اصابت موشک، به دلیل آنکه آن لحظه در دامنهٔ تابع نبود ما ناچار بودیم از حدگیری استفاده کنیم. اما، در لحظه‌هایی که ارتفاع هواپیما را داریم، اگر از حدگیری استفاده کنیم، آیا همان ارتفاع هواپیما در آن لحظه‌ها به‌دست می‌آید؟

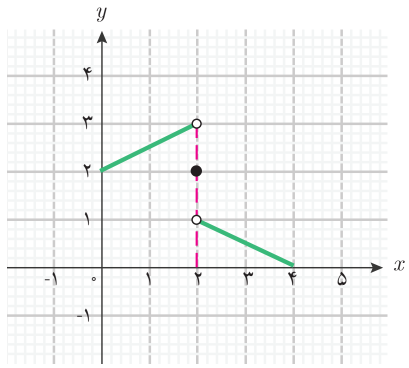
سعید گفت: من فکر می‌کنم، وقتی ارتفاع هواپیما را در یک لحظهٔ خاص بدانیم، به حدگیری نیازی نداریم. اما اگر از روش محاسبهٔ حد استفاده کنیم، مگر ممکن است عدد دیگری به‌دست آید؟

دبیر گفت: به‌دلیل پیوستگی حرکت هواپیما، حدِ تابعِ ارتفاعِ هواپیما در هر لحظه، همان ارتفاعِ هواپیما در همان لحظه (یعنی، مقدار تابع در آن نقطه) می‌باشد.

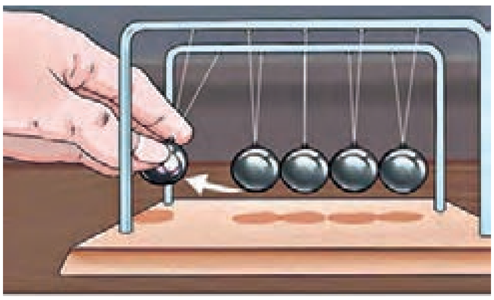


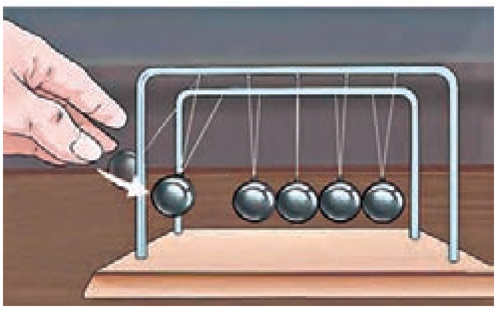
حمید گفت: آیا چنین وضعیتی برای همهٔ تابع‌ها برقرار است؟

دبیر گفت: خیر، در حالت کلی این طور نیست. تابع‌هایی که تغییرات آنها تدریجی نیست بلکه دفعی و ناگهانی است، این خاصیت را ندارند. برای مثال تابعی را با نمودار صفحهٔ بعد در نظر بگیرید.



این تابع در نقطهٔ $x=۲$ حد ندارد ولی حد چپ و حد راست دارد که با هم متفاوت هستند. تابع در این نقطه تغییرات دفعی دارد و مقدار تابع برابر حد چپ یا حد راست نیست.





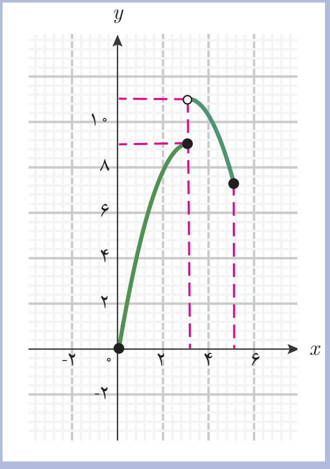
به عنوان مثال، آونگی را به شکل روبه‌رو در نظر بگیرید که از چند آونگی که با هم در تماس هستند، تشکیل شده است.

آونگ سمت چپ را بالا برده و رها می‌کنیم. سرعت این آونگ تابعی از زمان است. آونگ در ابتدا سرعت می‌گیرد ولی با برخورد به آونگ بعدی به یکباره می‌ایستد و تا مدتی ساکن می‌ماند. با انتقال حرکت، ناگهان مجدداً سرعت می‌گیرد و به بالاترین ارتفاع می‌رسد. در آنجا توقف لحظه‌ای می‌کند و دوباره به‌سمت پایین سرعت می‌گیرد و مجدداً در برخورد با آونگ بعدی به یکباره می‌ایستد. این حرکت به تعداد زیاد تکرار می‌شود. سرعت آونگ در لحظات برخورد با آونگ بعدی تغییرات دفعی دارد و سرعت آونگ به یکباره صفر می‌شود.

برای دیدن وضعیت تابع‌هایی که تغییرات دفعی دارند و نمودار آنها گسستگی دارد و وضعیت تابع‌هایی که تغییرات تدریجی دارند و نمودار آنها پیوستگی دارد، فعالیت صفحه بعد را انجام دهید.

فعالیت ۱

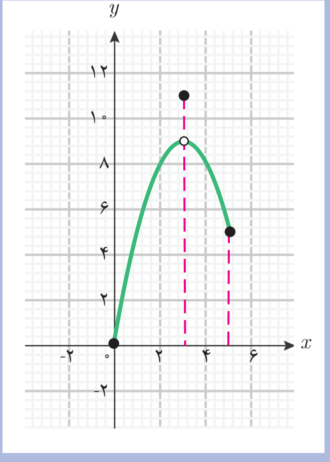
۱ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۶x & ۰\le x\le ۳\\ -x^{۲}+۶x+۲ & ۳<x\le ۵\end{cases}$ با دامنهٔ $[۰ , ۵]$ در زیر رسم شده است.



الف) از روی نمودار تابع، حد چپ، حد راست و حد این تابع را در نقطهٔ $x=۳$ بررسی کنید.

ب) وضعیت پیوستگی نمودار این تابع در نقطهٔ $x=۳$ چگونه است؟

۲ نمودار تابع $g(x)=\begin{cases}-x^{۲}+۶x & x\ne ۳\\ ۱۱ & x=۳\end{cases}$ با دامنهٔ $[۰ , ۵]$ در زیر رسم شده است.



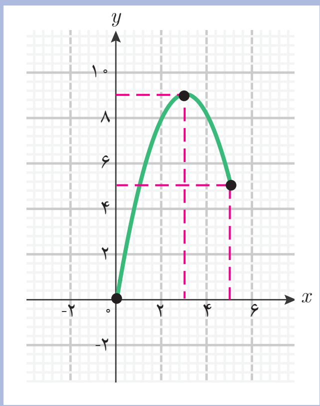
الف) از روی نمودار تابع، حد این تابع را در نقطهٔ $x=۳$ بررسی کنید.

ب) آیا حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه، مساوی است؟

پ) وضعیت پیوستگی نمودار این تابع در نقطهٔ $x=۳$ چگونه است؟

$\boxed{3}$ نمودار تابع $h(x) = -x^2 + 6x$ با دامنهٔ $[0\ ,\ 5]$ در زیر رسم شده است.

الف) از روی نمودار تابع، حد این تابع در نقطهٔ $x = 3$ را بررسی کنید.



ب) آیا حد تابع در این نقطه با مقدار تابع در این نقطه، مساوی است؟

پ) وضعیت پیوستگی نمودار این تابع در نقطهٔ $x = 3$ چگونه است؟

در این فعالیت، وضعیت سه تابع را از لحاظ پیوستگی نمودار و حد تابع در یک نقطه بررسی کردید. مشاهده می‌کنیم که وقتی حد تابع در یک نقطه وجود ندارد (وضعیت ۱) یا اگر وجود دارد، مقدار حد با مقدار تابع در آن نقطه مساوی نیست (وضعیت ۲)، نمودار تابع در آن نقطه دارای گسستگی است. اما در وضعیتی که حد تابع در یک نقطه موجود است و با مقدار تابع در آن نقطه مساوی است (وضعیت ۳)، نمودار تابع در آن نقطه گسستگی ندارد. در چنین وضعیتی می‌گویند تابع **در آن نقطه پیوسته** است. به طور کلی، تعریف پیوستگی یک تابع به شکل زیر است.

تعریف

پیوستگی تابع

تابع f و یک نقطهٔ a از دامنهٔ آن را در نظر بگیرید. می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a پیوسته است، هرگاه حد f در a موجود باشد و $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$. در غیر این صورت می‌گوییم تابع f در نقطهٔ a **ناپیوسته** است.

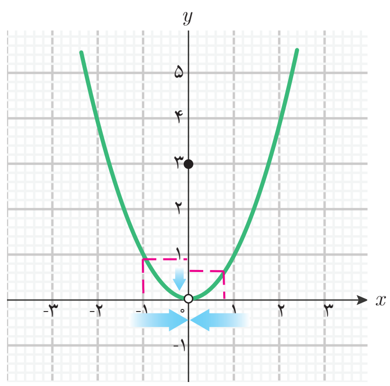
اگر تابعی در همهٔ نقاط دامنهٔ خود پیوسته باشد، آن را تابعی **پیوسته** می‌نامند.

اکثر پدیده‌های طبیعی پیوستگی دارند و تابع‌هایی که برای توصیف آنها به‌کار می‌بریم پیوسته می‌باشند.

مثال ۶

تابع f را با قانون زیر و دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید و پیوستگی آن را در نقاط $x=۰$ و $x=۲$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\neq ۰ \\ ۳ & x=۰ \end{cases}$$



حد این تابع در $x=۰$ برابر صفر است، اما $f(۰)=۳$.
بنابراین، این تابع در صفر ناپیوسته است.
نقاط نزدیک ۲ ناصفر هستند و قانون تابع f برای نقاط نزدیک ۲ همان $x^۲$ است؛ بنابراین:

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=\lim_{x\to ۲} x^۲=۲^۲=۴$$

از طرف دیگر $f(۲)=۲^۲=۴$، بنابراین

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=f(۲)$$

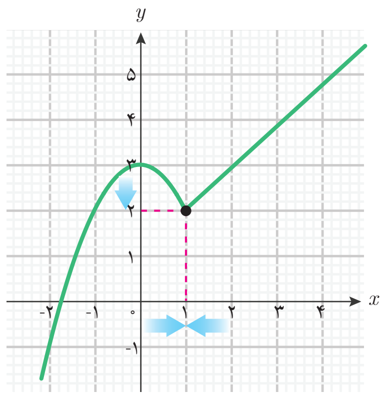
یعنی تابع f در نقطهٔ ۲ پیوسته است.

مثال ۷

تابع g را با قانون زیر و دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. پیوستگی تابع را در نقطهٔ $x=۱$ بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases} ۳-x^۲ & x\leq ۱ \\ x+۱ & ۱<x \end{cases}$$

مقدار این تابع در $x=۱$ برابر ۲ می‌باشد، زیرا $g(۱)=۳-۱^۲=۲$.
از آنجا که قانون تابع در دو طرف ۱ با هم متفاوت است، حد چپ و حد راست این تابع را در $x=۱$ جداگانه بررسی می‌کنیم.



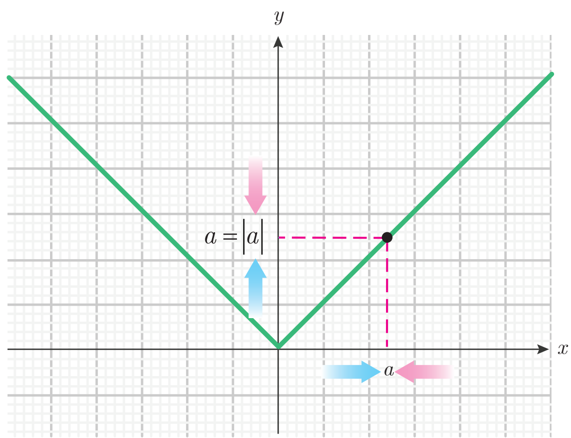
$$\lim_{x \to ۱^{+}} g(x) = \lim_{x \to ۱^{+}} (۱ + x) = ۱ + ۱ = ۲$$

$$\lim_{x \to ۱^{-}} g(x) = \lim_{x \to ۱^{-}} (۳ - x^{۲}) = ۳ - ۱^{۲} = ۲$$

حد چپ و حد راست در نقطهٔ $x = ۱$ وجود دارند و با هم مساوی هستند، پس حد تابع در این نقطه موجود است و همان عدد ۲ است. مقدار تابع در این نقطه نیز ۲ می‌باشد. بنابراین، تابع در این نقطه پیوسته است.

مثال ۸

آیا تابع $f(x) = |x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است؟



باید برابری حد این تابع و مقدار تابع را در همهٔ نقاط بررسی کنیم. در این مثال می‌توانیم در سه حالتِ مثبت و منفی و صفر بودنِ اعداد، پیوستگی را بررسی کنیم.

اگر a یک عدد مثبت باشد، xهای (به اندازه کافی) نزدیک a نیز مثبت هستند. بنابراین:

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} x = a$$

با توجه به مثبت بودن a داریم: $f(a) = |a| = a$

در نتیجه $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$

اگر a یک عدد منفی باشد، xهای (به اندازه کافی) نزدیک a نیز منفی هستند و در نتیجه مقادیر $f(x)$ برابر $-x$ هستند. بنابراین:

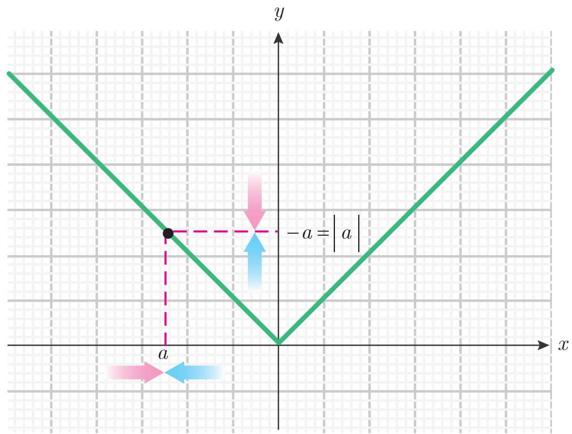
$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} |x| = \lim_{x \to a} (-x) = -a$$

با توجه به منفی بودن a داریم $f(a) = |a| = -a$. بنابراین $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.

اگر $a=0$، حد چپ و حد راست این تابع در صفر، برابر صفر است، بنابراین:

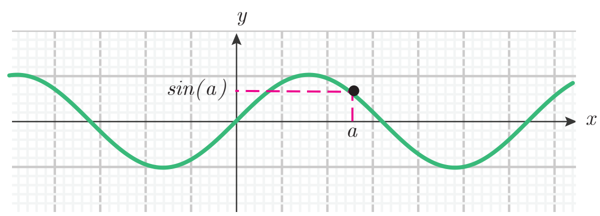
$$\lim_{x\to 0}|x|=0=|0|$$

به این ترتیب، حد تابع $|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در همهٔ نقاط مثبت و منفی و صفر برابر مقدار تابع در آن نقاط است و این تابع، پیوسته است.

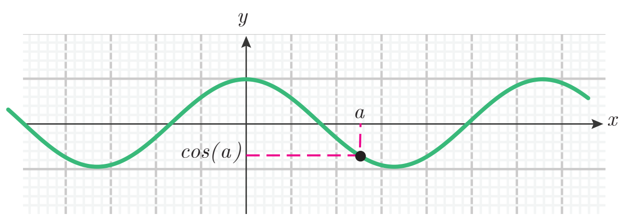


بسیاری از تابع‌هایی که می‌شناسیم پیوسته هستند. برای مثال، تابع‌های چندجمله‌ای، تابع‌های $\sin x$ و $\cos x$، تابع نمایی b^x و تابع $\sqrt{x}$ پیوسته هستند. برای هر نقطهٔ a از دامنهٔ این تابع‌ها داریم:

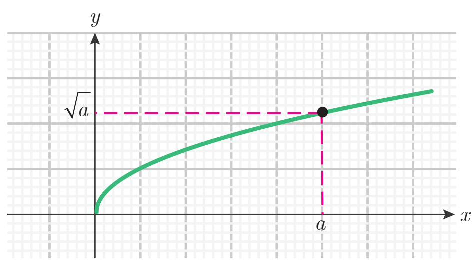
$$\lim_{x\to a}\sin x=\sin a$$



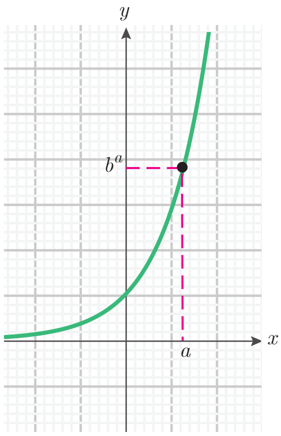
$$\lim_{x\to a}\cos x=\cos a$$



$$\lim_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$$



$$\lim_{x\to a} b^x = b^a$$



مثال ۹

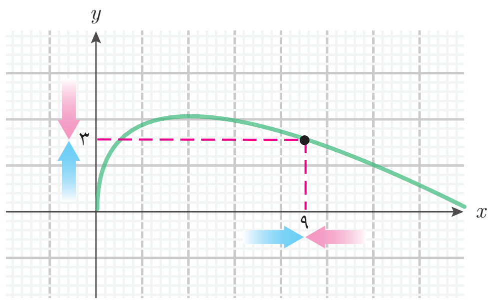
آیا تابع $g(x)=۴\sqrt{x}-x$ با دامنهٔ $[۰\ ,+\infty)$ در نقطهٔ $x=۹$ پیوسته است؟

مقدار این تابع را در $x=۹$ به‌دست می‌آوریم. داریم: $g(۹)=۴\sqrt{۹}-۹=۳$.

$$\lim_{x\to ۹} g(x)=\lim_{x\to ۹}(۴\sqrt{x}-x)=۴\lim_{x\to ۹}\sqrt{x}-\lim_{x\to ۹}x=۴\sqrt{۹}-۹=۳=g(۹)$$

بنابراین، این تابع در نقطهٔ $x=۹$ پیوسته است.

محاسبهٔ بالا در هر نقطهٔ دیگر از دامنهٔ این تابع، نتیجهٔ مشابهی دارد یعنی این تابع در همهٔ نقاط دامنهٔ خود پیوسته است.



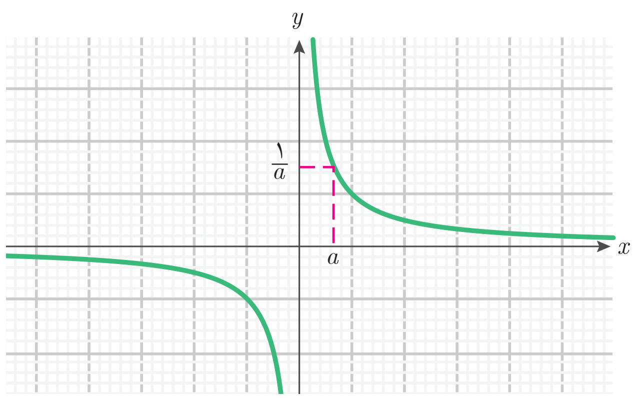
گفتگو

سعید گفت: در کتابی خوانده‌ام که تابع $\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ پیوسته است.

اگر a نقطه‌ای از دامنهٔ این تابع باشد، داریم $a\neq ۰$. با استفاده از حد تقسیم دو تابع داریم:

$$\lim_{x\to a}\frac{۱}{x}=\frac{\lim_{x\to a}۱}{\lim_{x\to a}x}=\frac{۱}{a}$$

از طرفی مقدار تابع در نقطه a برابر $\frac{۱}{a}$ است. بنابراین، این تابع پیوسته است.



سعید ادامه داد: من فکر می‌کردم نمودار تابع‌های پیوسته نباید گسستگی داشته باشند، اما نمودار این تابع از دو قسمت جدا از هم تشکیل شده است. پس چرا آن را پیوسته می‌نامیم؟

دبیر گفت: ایدهٔ اولیه مفهوم پیوستگی همین است که نمودار تابع‌های پیوسته نباید گسستگی داشته باشند، ولی این ایده در جایی اعتبار دارد که دامنهٔ تابع یک بازه باشد. اگر دامنهٔ یک تابع از اجتماع چند بازهٔ جدا از هم تشکیل شده باشد (مانند تابع $\frac{1}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$)، نمودار تابع نیز از چند قسمت جدا از هم تشکیل خواهد شد. در این حالت گسستگی نمودار تابع به دلیل چند قسمت بودن دامنهٔ آن است. در مثال ذکر شده دامنه، مجموعهٔ $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ است.

سعید پرسید: آیا از روی نمودار تابع‌ها می‌توان پیوستگی آنها را تشخیص داد؟

دبیر گفت: بله. تابع‌های پیوسته آنهایی هستند که نمودارشان در هر بازه از دامنه‌شان پیوستگی داشته باشند.

کار در کلاس ۱

۱) پیوستگی تابع‌های زیر را در نقاط داده شده بررسی کنید.

الف) $g(t)=\sin t+\cos t$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $t=\pi$.

ب) $f(x)=\begin{cases} x^2+x & x\leq 0 \\ 2^x-x & 0<x \end{cases}$ در $x=0$.

پ) $h(x)=\sqrt{1-x^2}$ با دامنهٔ $[-1\,,\,1]$ در $x=-1$.

۲) آیا تابع $f(x)=\frac{1}{\sin x}$ با دامنهٔ $(0,\frac{\pi}{2})$ پیوسته است؟

مسائل

۱ آیا تابع زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در $x = ۱$ پیوسته است؟ نمودار این تابع را رسم کنید.

$$h(x)=\begin{cases} ۱+x^{۲} & x<۱ \\ ۰ & x=۱ \\ ۲x & ۱<x \end{cases}$$

۲ آیا تابع زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ پیوسته است؟

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} & x\neq ۰ \\ ۱ & x=۰ \end{cases}$$

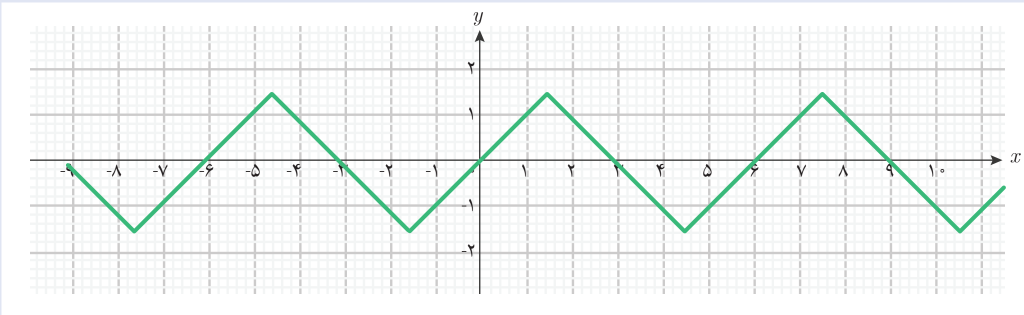
۳ تابع f را با قانون زیر و دامنهٔ $[۰ , ۳]$ در نظر بگیرید. نمودار این تابع را رسم کنید. در چه نقاطی این تابع ناپیوسته است؟ چرا؟

$$f(x)=\begin{cases} ۱ & ۰\leq x<۱ \\ ۲ & ۱\leq x<۲ \\ ۱ & ۲\leq x\leq ۳ \end{cases}$$

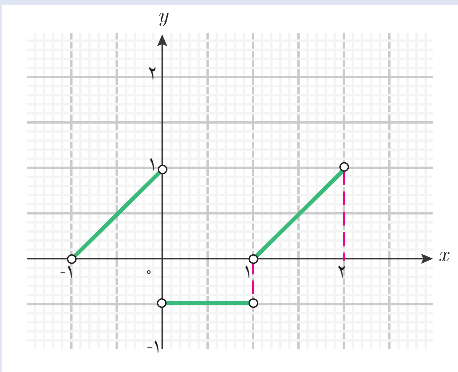
۴ آیا تابع $g(x)=\dfrac{\cos^{۲} x}{۱-\sin x}$ با دامنهٔ $\left(۰, \dfrac{\pi}{۲}\right)$ پیوسته است؟

۵ یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ بنویسید که در صفر ناپیوسته باشد.

۶ نمودار یک تابع با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. آیا این تابع پیوسته است؟



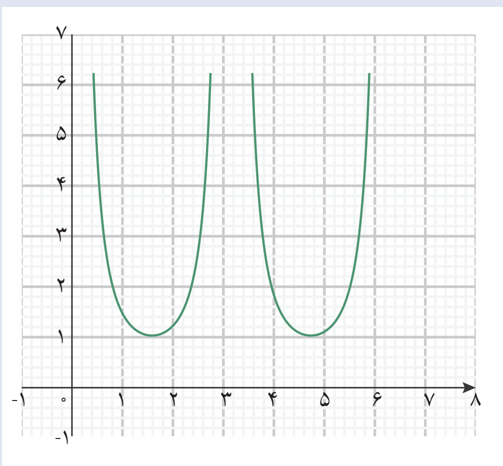
۷ نمودار یک تابع با دامنهٔ $(-۱,۰)\cup(۰,۱)\cup(۱,۲)$ به شکل زیر است. آیا این تابع پیوسته است؟



۸ تابع $f(x)=\dfrac{۱}{\sin^{۲} x}$ با دامنهٔ $(۰,\pi)\cup(\pi,۲\pi)$ را با نمودار روبه‌رو در نظر بگیرید.

الف) آیا f در دامنهٔ خود پیوسته است؟

ب) بدون محاسبه، مقدار حد تابع f در نقطهٔ $x=\dfrac{\pi}{۶}$ را روی شکل نشان دهید.



استانداردهای ارزشیابی پودمان سوم

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکردی (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان سوم: مقایسهٔ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها	انجام محاسبهٔ حدهای یک‌طرفه و دوطرفه	حل مسائل مرتبط با تابع‌های پیوسته و ناپیوسته	بالاتر از حد انتظار	□ مدل‌سازی و حل مسائل زندگی واقعی (مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با حدهای یک‌طرفه و دوطرفه و پیوستگی تابع‌ها	۳
			حد انتظار	□ حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با تابع‌های پیوسته و ناپیوسته	۲
	مدل‌سازی وضعیت‌های مسئله‌ای به کمک تابع‌های پیوسته و ناپیوسته		پایین‌تر از حد انتظار	□ درک و کاربرد صحیح مفاهیم و روابط برای تعیین وضعیت و محاسبه حد توابع	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					

پودمان چهارم

درک مفهوم مشتق

درک شهودی از مفهوم سرعت از مدت‌ها قبل وجود داشته و فیزیکدانان با آن آشنا بوده‌اند اما ارائهٔ فرمول دقیق برای محاسبهٔ سرعت و تعیین اندازهٔ آن، به کمک مفاهیم ریاضی انجام شده‌است. با استفاده از معادلهٔ حرکت و مشتق‌گیری از آن می‌توان معادلهٔ سرعت یک متحرک را به‌دست آورد. امروزه تجهیزات پیشرفته‌ای برای تعیین سرعت وجود دارد، با استفاده از این وسایل سرعت وسیلهٔ نقلیه کنترل و شرایط برای رانندگی ایمن فراهم می‌شود.

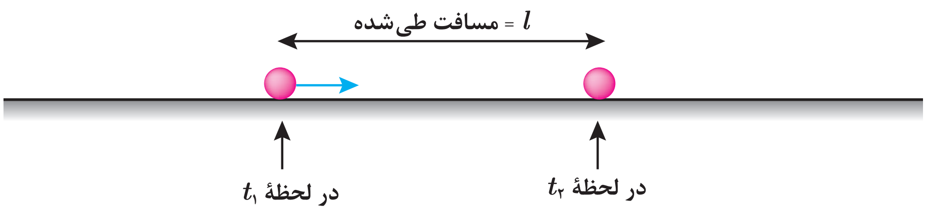
۱ــ مشتق تابع‌ها

درس امروز ما با موضوع «مسئلهٔ نیوتن در محاسبهٔ سرعت اجسام متحرک» شروع شد.

دبیر گفت: نیوتن فیزیکدانی بود که حدوداً سیصد سال پیش زندگی می‌کرد. آن زمان کسی نمی‌دانست سرعت اجسام متحرک را چگونه می‌توان محاسبه کرد. چه کسی می‌داند سرعت متحرکی که به‌طور یکنواخت حرکت می‌کند (حرکت با سرعت ثابت)، چگونه اندازه‌گیری می‌شود؟

سعید گفت: اندازه‌گیری سرعت متحرک‌هایی که با سرعت ثابت حرکت می‌کنند، ساده است؛ کافی است مسافت طی‌شده توسط متحرک (l) در یک بازهٔ زمانی را پیدا کنیم و آن را بر زمان سپری شده $(t_2 - t_1)$ تقسیم کنیم.

$$\text{سرعت متحرک} = v = \frac{l}{t_2 - t_1}$$



دبیر گفت: آیا فرقی می‌کند که در کدام بازهٔ زمانی مسافت طی‌شده را حساب کنیم؟

سعید گفت: خیر، فرقی نمی‌کند. با توجه به اینکه سرعت ثابت است، تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان سپری‌شده در هر بازهٔ زمانی، مقدار ثابتی است که همان سرعت متحرک است.

دبیر گفت: البته در بیشتر موارد، متحرک‌ها سرعت ثابت ندارند و سرعت آنها در حال تغییر است و در لحظه‌های مختلف، سرعت‌های متفاوتی دارند. مسئلهٔ اصلی نیوتن، محاسبهٔ سرعت لحظه‌ای چنین متحرک‌هایی بود. اگر شما به جای نیوتن بودید این مسئله را چگونه حل می‌کردید؟

حمید گفت: برای هر متحرکی (با سرعت ثابت یا غیرثابت) می‌توان مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی را به‌دست آورد. من فکر می‌کنم با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان سپری شده، می‌توان سرعت متحرک را به‌دست آورد.

سعید گفت: اگر در یک بازهٔ زمانی، متحرک با سرعت‌های مختلفی حرکت کرده باشد، در این صورت تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان سپری‌شده، کدام‌یک از آن سرعت‌ها را نشان خواهد داد؟

دبیر گفت: در فیزیک، نسبت مسافت طی‌شده در یک بازهٔ زمانی، به زمان حرکت را **سرعت متوسط متحرک در آن بازهٔ زمانی** می‌نامند.

حمید گفت: آیا می‌توان گفت که سرعت متوسط محاسبه شده با این روش، همان سرعت لحظه‌ای متحرک است؟

دبیر گفت: خیر، سرعت متوسط مربوط به هیچ لحظهٔ خاصی نیست و در یک بازهٔ زمانی محاسبه می‌شود. فقط در سرعت ثابت، سرعت متوسط همان سرعت متحرک در هر لحظه است.

سعید گفت: اگر طول بازهٔ زمانی (زمان سپری‌شده) را کوچک در نظر بگیریم، آیا می‌توان گفت که سرعت متحرک در هر لحظه از آن بازه، تقریباً با سرعت متوسط در همان بازه برابر است؟

دبیر گفت: بله، ایدهٔ خوبی است، ولی مسئلهٔ ما یافتن مقدار تقریبی سرعت لحظه‌ای نیست، بلکه می‌خواهیم مقدار دقیق آن را به‌دست آوریم.

حمید گفت: فکر می‌کنم که اگر بازهٔ زمانی را خیلی کوچک کنیم، می‌توانیم تقریب بهتری از سرعت لحظه‌ای به‌دست آوریم.

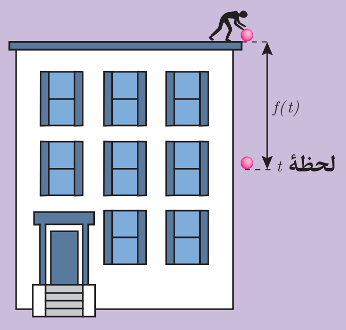
دبیر گفت: آیا منظور شما آن است که عمل حدگیری انجام دهیم؟

حمید گفت: بله. فکر می‌کنم از این طریق می‌توان این مسئله را حل کرد.

دبیر گفت: بهتر است این پیشنهاد را در فعالیت زیر بررسی کنیم.

فعالیت ۱

توپی را از بالای یک ساختمان به ارتفاع ۱۶ متر رها می‌کنیم. فاصلهٔ این توپ تا نقطهٔ رها شدن در هر لحظهٔ t با تابع $f(t)=5t^2$ محاسبه می‌شود که در آن t زمان برحسب ثانیه و $f(t)$ فاصله برحسب متر است.



۱ $f(1)$ چه معنایی دارد؟ آن را محاسبه کنید.

۲ اگر h عددی کوچک و مثبت باشد، $f(1+h)$ چه معنایی دارد؟ آن را به‌دست آورید.

۳ توپ در بازهٔ زمانی $[1,1+h]$ چند متر حرکت کرده است و این حرکت چند ثانیه طول کشیده است؟

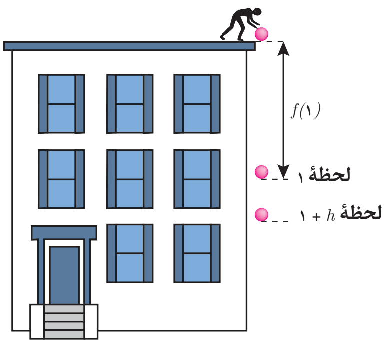
۴ سرعت متوسط توپ در بازهٔ زمانی $[1,1+h]$ تابعی از h است. این تابع را با $v(h)$ نشان دهید. قانون تابع $v(h)$ را بنویسید.

۵ جدول تابع $v(h)$ را به ازای برخی hهای کوچک و مثبت کامل کنید.

h	۰ ←	۰/۰۰۰۱	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱
$v(h)$	? ←	...	...	۱۰/۰۵	۱۰/۵

۶ $\lim\limits_{h\to ۰} v(h)$ چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۷ سرعت توپ در لحظهٔ $t=۱$ چقدر است؟



تابع $f(t)$ نشان‌دهندهٔ فاصله توپ از نقطهٔ رها شدن است.
برای یک مقدار مثبت و کوچک h:

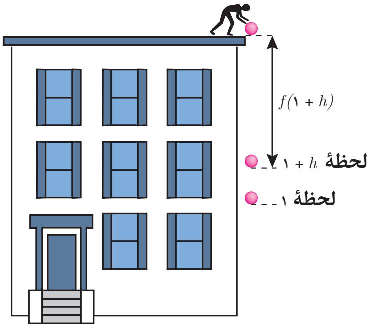
- عدد $۱+h$ زمانی بعد از $t=۱$ و نزدیک به آن را نشان می‌دهد.
- $[۱,۱+h]$ بازه‌ای از زمان‌های بعد از $t=۱$ و نزدیک به آن است.

با پاسخ به سؤالات (۱) تا (۴) سرعت متوسط این توپ در این بازه به‌دست می‌آید. طول زمان حرکت توپ در بازهٔ $[۱,۱+h]$ برابر h و مسافت طی‌شده برابر $f(۱+h)-f(۱)$ است. بنابراین، سرعت متوسط توپ در این بازه به صورت $v(h)=\dfrac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$ است. با نزدیک کردن h به صفر، سرعت متوسط توپ به سرعت لحظه‌ای توپ در $t=۱$ نزدیک می‌شود. بنابراین، $\lim\limits_{h\to ۰} v(h)$ را می‌توان سرعت لحظه‌ای توپ در لحظهٔ $t=۱$ در نظر گرفت.

برای یافتن سرعت لحظه‌ای توپ در $t=۱$، باید به زمان‌های قبل از $t=۱$ نیز توجه کنیم[۱]. برای یک مقدار منفی و کوچک h، عدد $۱+h$ زمانی قبل از $t=۱$ و نزدیک به آن را نشان می‌دهد ($۱+h<۱$). $[۱+h,۱]$ بازه‌ای از زمان‌های قبل از $t=۱$ و نزدیک به آن است. زمان حرکت توپ در این بازه برابر

۱ـ اعداد قبل از ۱ را می‌توان به صورت $۱+h$ نوشت که $h<۰$.

است با: $۱-(۱+h)=-h$. با توجه به آنکه h منفی است، $-h$ مثبت است. مسافت طی‌شده در این بازه برابر است با $f(۱)-f(۱+h)$. بنابراین، سرعت متوسط در این بازه برابر است با:



$$v(h)=\frac{f(۱)-f(۱+h)}{-h}=\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$$

در این حالت نیز حد این کسر وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، برابر سرعت لحظه‌ای توپ در $t=۱$ است؛ بنابراین سرعت توپ در لحظهٔ $t=۱$ برابر است با حد دوطرفهٔ زیر:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}$$

فرض کنید f تابعی دلخواه باشد. برای یک نقطه مانند a از دامنهٔ این تابع، اگر h عددی کوچک باشد، تفاضل $f(a+h)-f(a)$، میزان تغییر مقادیر تابع f را وقتی متغیر از a به $a+h$ تغییر می‌کند، نشان می‌دهد. میزان تغییر مقادیر متغیر برابر h است. نسبت تغییرات مقادیر تابع به تغییرات مقادیر متغیر عبارت است از:

$$\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

حد این کسر را وقتی h به صفر نزدیک می‌شود، در صورت وجود، **مشتق f در a** می‌نامند و با $f'(a)$ (خوانده می‌شود f پریم a) نشان می‌دهند. یعنی:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

کسر $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ نشان‌دهندهٔ میزان تغییرات مقادیر تابع نسبت به میزان تغییرات متغیر در نقطهٔ a است. بنابراین، حد این کسر وقتی h به صفر میل می‌کند، سرعت تغییرات مقادیر تابع را نسبت به تغییرات مقادیر متغیر در نقطهٔ a نشان می‌دهد. پس، مشتق یک تابع در یک نقطه، نشان‌دهندهٔ سرعت تغییرات مقادیر تابع نسبت به تغییرات مقادیر متغیر در آن نقطه است.

تعریف

مشتق تابع در یک نقطه

فرض کنید f تابعی با دامنهٔ D_f باشد. برای نقطه‌ای مانند a از دامنهٔ این تابع، حد زیر را در صورت وجود، **مشتق f در a** می‌نامند و با نماد $f'(a)$ نشان می‌دهند.

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

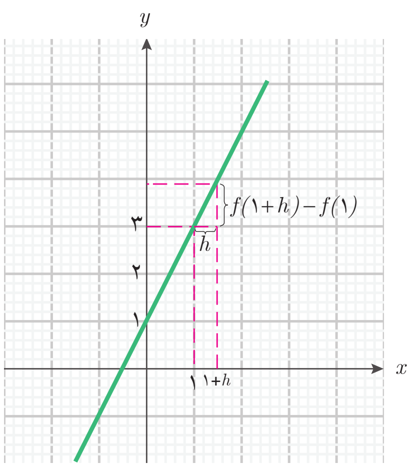
در این حالت می‌گوییم f در a مشتق‌پذیر است. اما، اگر حد بالا وجود نداشته باشد، می‌گوییم f در a مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۱

مشتق تابع خطی $f(x)=۲x+۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقاط $x=۱$، $x=۳$ و نقطهٔ دلخواه a حساب کنید.

$$f'(۱)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۱+h)-f(۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲(۱+h)+۱-(۲\times ۱+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{h}=\lim_{h\to ۰}۲=۲$$

برای داشتن درک بهتر از نسبت تغییرات مقادیر تابع به تغییرات مقادیر متغیر، این تغییرات را روی نمودار این تابع بررسی می‌کنیم:



همان‌طور که در نمودار دیده می‌شود، نسبت تغییرات مقادیر تابع به تغییرات متغیر در هر بازهٔ $[۱,۱+h]$، همان شیب خط است. بنابراین، مشتق این تابع خطی در نقطهٔ $x=۱$ با شیب این خط برابر است.

مشتق این تابع در نقطهٔ $x=۳$ به صورت زیر است.

$$f'(۳)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲(۳+h)+۱)-(۲\times ۳+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{h}=\lim_{h\to ۰}۲=۲$$

به‌طور کلی در نقطهٔ دلخواه a، مشتق این تابع به صورت زیر است:

$$f'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{(۲(a+h)+۱)-(۲a+۱)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۲h}{h}=\lim_{h\to ۰}۲=۲$$

بنابراین، مشتق این تابع در همهٔ نقاط، مقدار ۲ می‌باشد.

مثال ۲

مشتق تابع خطی $g(x)=-۴x+۷$ را در نقطهٔ دلخواه a به‌دست آورید.

$$g'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\big(-۴(a+h)+۷\big)-(-۴a+۷)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۴h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۴)=-۴$$

در این مثال‌ها دیدیم مشتق این تابع‌های خطی در هر نقطه، همان شیب خط است. به‌طور کلی **مشتق هر تابع خطی در هر نقطه، مقدار ثابتی است که همان شیب نمودار آن تابع خطی است**. برای دیدن درستی این مطلب، تابع خطی دلخواه $g(x)=mx+b$ را با شیب m در نظر بگیرید. مشتق این تابع را در یک نقطهٔ دلخواه a به صورت زیر محاسبه می‌کنیم.

$$g'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\big(m(a+h)+b\big)-(ma+b)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{ma+mh+b-ma-b}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{mh}{h}=\lim_{h\to ۰}m$$

با توجه به اینکه m عددی ثابت است، داریم: $\lim\limits_{h\to ۰}m=m$ پس: $g'(a)=m$

این ویژگی، به معنای آن است که سرعت تغییرات (افزایش یا کاهش) مقادیر تابع خطی در همهٔ نقاط، یکسان است و برابر همان شیب نمودار آن تابع خطی است.

مثال ۳

مشتق تابع ثابت $g(x)=۵$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ دلخواه a حساب کنید.

$$g'(a)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(a+h)-g(a)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۵-۵}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{۰}{h}=\lim_{h\to ۰}۰=۰$$

مشتق این تابع ثابت در همهٔ نقاط صفر است. برای هر تابع ثابت دیگری نیز این محاسبه قابل تکرار است. بنابراین، **مشتق هر تابع ثابت در هر نقطه صفر است**. این نتیجه قابل پیش‌بینی بود، زیرا مشتق یک تابع نشان‌دهندهٔ سرعت تغییرات تابع نسبت به تغییرات متغیر در هر نقطه است و تابع ثابت هیچ‌گونه تغییری ندارد؛ پس طبیعی است که مشتق آن صفر باشد.

مثال ۴

مشتق‌پذیری تابع $f(x)=|x|$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید.

برای بررسی مشتق‌پذیری این تابع در $x=۰$، باید وجود حد $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{|۰+h|-|۰|}{h}$ را بررسی کنیم.

در محاسبهٔ این حد، لازم است وضعیت $|h|$ را بشناسیم، یعنی علامت h باید مشخص باشد، بنابراین حد چپ و حد راست این تابع کسری را جداگانه بررسی می‌کنیم.

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{|۰+h|-|۰|}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}۱=۱$$

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{|۰+h|-|۰|}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{|h|}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-h}{h}=\lim_{h\to ۰^-}-۱=-۱$$

از آنجا که حد چپ و حد راست $\frac{|۰+h|-|۰|}{h}$ در صفر برابر نیستند، این تابع وقتی $h\to ۰$، حد ندارد. بنابران تابع f در $x=۰$ مشتق‌پذیر نیست.

دیدیم تابع $f(x)=|x|$ در $x=۰$ پیوسته است، ولی در این نقطه مشتق‌پذیر نیست. بنابراین، **ممکن است تابعی در نقطه‌ای از دامنهٔ خود پیوسته باشد، ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد**. اما می‌توان ثابت کرد که **اگر تابعی در نقطه‌ای مشتق‌پذیر باشد، حتماً در آن نقطه پیوسته خواهد بود.**

مثال ۵

تابع دو ضابطه‌ای زیر را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

$$f(x)=\begin{cases} x^۲+x & x\leq ۳ \\ x+۹ & ۳<x \end{cases}$$

باید وجود $\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۳)}{h}$ را بررسی کنیم. داریم $f(۳)=۱۲$ ولی برای محاسبهٔ $f(۳+h)$ چون h ممکن است مثبت یا منفی باشد و قانون f در سمت چپ و راست ۳ متفاوت است، لازم است

حد چپ و حد راست $\frac{f(۳+h)-۱۲}{h}$ را وقتی h به سمت صفر میل می‌کند جداگانه به‌دست آوریم.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{f(۳+h)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{\left((۳+h)^۲+(۳+h)\right)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۹+۶h+h^۲+۳+h-۱۲}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{۷h+h^۲}{h}=\lim_{h\to ۰^-}(۷+h)=۷$$

$$\lim_{h\to ۰^+}\frac{f(۳+h)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{\left((۳+h)+۹\right)-۱۲}{h}=\lim_{h\to ۰^+}\frac{h}{h}=\lim_{h\to ۰^+}۱=۱$$

این محاسبه نشان می‌دهد $\lim_{h\to ۰}\frac{f(۳+h)-f(۱)}{h}$ وجود ندارد و تابع f در $x=۳$ مشتق‌پذیر نیست.

مثال ۶

تابع دو ضابطه‌ای زیر را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ در نظر بگیرید. مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۱$ بررسی کنید.

$$g(x)=\begin{cases}-۲x^۲+۱۰x & x\leq ۱\\ ۶x+۲ & ۱<x\end{cases}$$

باید وجود $\lim_{h\to ۰}\frac{g(۱+h)-g(۱)}{h}$ را بررسی کنیم. داریم $g(۱)=۸$ ولی برای محاسبهٔ $g(۱+h)$ چون h ممکن است مثبت یا منفی باشد و قانون g در سمت چپ و راست ۱ متفاوت است، لازم است حد چپ و حد راست $\frac{g(۱+h)-۸}{h}$ را وقتی h به سمت صفر میل می‌کند جداگانه به‌دست آوریم.

$$\lim_{h\to ۰^-}\frac{g(۱+h)-۸}{h}=\lim_{h\to ۰^-}\frac{\left(-۲(۱+h)^۲+۱۰(۱+h)\right)-۸}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰^-}\frac{-۲-۴h-۲h^۲+۱۰+۱۰h-۸}{h}$$

$$= \lim_{h\to ۰^-} \frac{۶h-۲h^۲}{h} = \lim_{h\to ۰^-}(۶-۲h)=۶$$

$$\lim_{h\to ۰^+} \frac{g(۱+h)-۸}{h} = \lim_{h\to ۰^+} \frac{\left(۶(۱+h)+۲\right)-۸}{h} = \lim_{h\to ۰^+} \frac{۶+۶h-۶}{h} = \lim_{h\to ۰^+} ۶ = ۶$$

این محاسبه نشان می‌دهد تابع g در $x=۱$ مشتق‌پذیر است و $g'(۱)=۶$.

کار در کلاس ۱

مشتق تابع $f(x)=x^۲+۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x=۲$ بیابید.

مسائل

۱ مشتق تابع‌های زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نقطهٔ $x=۴$ به‌دست آورید.

الف) $f(x)=۲$

ب) $g(x)=-۳x+۴$

پ) $u(x)=x-x^۲$

۲ مشتق تابع $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در نقطهٔ $x=۲$ به‌دست آورید.

۳ تابع دوضابطه‌ای f را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و قانون زیر در نظر بگیرید:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x^۲-۱۰ & x\leq ۳ \\ -x+۱۱ & ۳<x \end{cases}$$

پیوستگی و مشتق‌پذیری این تابع را در $x=۳$ بررسی کنید.

۴ نشان دهید تابع دوضابطه‌ای زیر در $x=-۱$ مشتق‌پذیر است. سپس مشتق آن را در این نقطه به‌دست آورید.

$$v(x)=\begin{cases} ۴x^۲+۲x-۴ & x\leq -۱ \\ -۶x-۸ & -۱<x \end{cases}$$

۵ تابع دوضابطه‌ای g را با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به صورت زیر در نظر بگیرید.

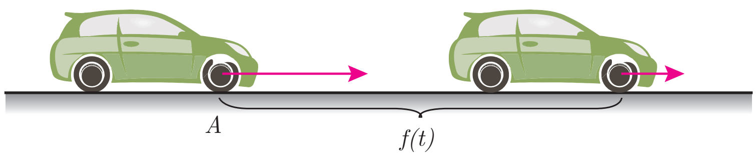
$$g(x)=\begin{cases} x^۲-x+۱ & x\leq ۰ \\ ax+۱ & ۰<x \end{cases}$$

الف) نشان دهید g در $x=۰$ پیوسته است.

ب) a را طوری تعیین کنید که g در $x=۰$ مشتق‌پذیر باشد. در این صورت $g'(۰)$ چقدر خواهد بود؟

۲ـ مشتق و سرعت متحرک‌ها

برای آزمایش ترمز خودروها، آنها را با سرعت‌های متفاوت به حرکت درمی‌آورند و سپس با ترمز کردن مدت زمان لازم برای متوقف شدن و مسافت طی‌شده (طول خط ترمز) را اندازه‌گیری می‌کنند. برای مثال، فرض کنید ماشینی با سرعت ثابت ۲۰ متر بر ثانیه (معادل ۷۲ کیلومتر بر ساعت) در حال حرکت است.



در لحظهٔ $t=۰$ در نقطهٔ A راننده پدال ترمز را فشار می‌دهد و خودرو پس از طی مسافتی، بعد از چند ثانیه متوقف می‌شود. اگر مسافت طی‌شده توسط خودرو (بر حسب متر) از نقطهٔ A به عنوان تابعی از زمان (بر حسب ثانیه) با قانون $f(t)=-۲t^۲+۲۰t$ بیان شده باشد، طبق فعالیت (۱)، سرعت این خودرو پس از ۲ ثانیه، همان مشتق تابع در لحظهٔ $t=۲$، یعنی $f'(۲)$ است.

$$f'(۲)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(۲+h)-f(۲)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left(-۲(۲+h)^۲+۲۰(۲+h)\right)-(-۲\times ۲^۲+۲۰\times ۲)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲h^۲-۸h+۲۰h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۲h-۸+۲۰)=۱۲$$

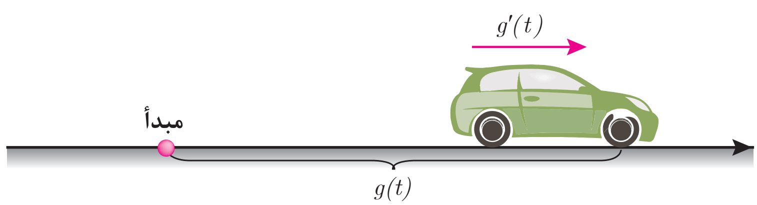
بنابراین، سرعت این خودرو پس از ۲ ثانیه از ۲۰ متر بر ثانیه به ۱۲ متر بر ثانیه کاهش پیدا می‌کند. سرعت این خودرو پس از t ثانیه برابر $f'(t)$ است.

$$f'(t)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\left(-۲(t+h)^۲+۲۰(t+h)\right)-(-۲t^۲+۲۰t)}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-۲h^۲-۴th+۲۰h}{h}=\lim_{h\to ۰}(-۲h-۴t+۲۰)=-۴t+۲۰$$

به کمک تابع $f'(t)$ می‌توانیم تشخیص دهیم، خودرو در چه زمانی متوقف می‌شود و تا محل توقف چند متر را طی می‌کند. سرعت خودرو پس از t ثانیه به اندازه $f'(t)=-۴t+۲۰$ (متر بر ثانیه)

خواهد بود. توقف خودرو به معنای صفر شدن سرعت آن است. بنابراین باید لحظه‌ای را بیابیم که $f'(t)=-۴t+۲۰=۰$. از حل این معادله مشخص می‌شود که سرعت خودرو به ازای $t=۵$ صفر می‌شود. یعنی خودرو پس از ۵ ثانیه متوقف می‌شود. برای به‌دست آوردن مسافت طی‌شده توسط خودرو از تابع f استفاده می‌کنیم. داریم: $f(۵)=۵۰$، بنابراین، خودرو پس از طی ۵۰ متر می‌ایستد.
توجه داشته باشید قانون این تابع، فقط از زمان شروع ترمز تا زمانی که خودرو توقف می‌کند، اعتبار دارد؛ یعنی دامنهٔ این تابع، بازهٔ $[۰, ۵]$ است.
به‌طور کلی، اگر متحرکی روی یک مسیر مستقیم (شکل زیر) حرکت کند، با در نظر گرفتن یک محور روی مسیر حرکت، می‌توانیم مکان این متحرک را در هر لحظهٔ t در یک بازهٔ زمانی خاص، با مقدار $g(t)$ نشان دهیم. در این صورت g را **تابع حرکت** این متحرک می‌نامند.



مشتق تابع حرکت g در هر لحظهٔ t نشان‌دهندهٔ سرعت متحرک در لحظهٔ t است. یعنی سرعت متحرک در لحظهٔ t برابر $g'(t)$ است.
یک متحرک ممکن است در جهت محور یا در خلاف جهت محور حرکت کند. این نکته را از علامت مشتق تابع حرکت می‌توان تشخیص داد. **مثبت بودن مشتق تابع حرکت در یک لحظه، نشان می‌دهد که متحرک در آن لحظه در جهت مثبت محور در حال حرکت است و منفی بودن مشتق تابع حرکت در یک لحظه، نشان می‌دهد که متحرک در آن لحظه در جهت منفی محور در حال حرکت است. صفر شدن مشتق در یک لحظهٔ خاص به معنای آن است که متحرک در آن لحظه، توقف لحظه‌ای می‌کند.**

مثال ۷

متحرکی روی یک مسیر مستقیم حرکت می‌کند و تابع حرکت آن $g(t)=t^۲-۲t$ است. زمان را بر حسب ثانیه و فاصله را بر حسب متر در نظر بگیرید. این حرکت در بازهٔ زمانی $[۰,۴]$ انجام می‌شود. این متحرک از چه نقطه‌ای به چه نقطه‌ای می‌رود. تغییرات سرعت این متحرک را در این بازهٔ زمانی توصیف کنید.

با توجه به اینکه $g(۰)=۰$ و $g(۴)=۸$، این متحرک از مبدأ حرکت می‌کند و نهایتاً به ۸ متر جلوتر می‌رسد. برای درک چگونگی حرکت، سرعت این متحرک را در لحظهٔ دلخواه t به‌دست می‌آوریم. داریم $g'(t)=۲t-۲$. تغییرات g' و علامت آن و شیوه حرکت متحرک در جدول زیر مشخص شده است.

t	۰		۱		۴
$g'(t)$	۲-	منفی	۰	مثبت	۶
شیوه حرکت متحرک		حرکت رو به عقب	ایست لحظه‌ای	حرکت رو به جلو	

این جدول نشان می‌دهد: متحرک در ۱ ثانیه اول رو به عقب حرکت می‌کند، سپس ایست لحظه‌ای می‌کند. ۳ ثانیه بعد رو به جلو حرکت می‌کند. از آنجا که $g(۱)=-۱$، متحرک در ۱ ثانیه اول ۱ متر رو به عقب حرکت کرده است و در آن نقطه ایستاده است و با تغییر جهت، رو به جلو حرکت کرده است. از آنجا که $g(۴)=۸$، این متحرک از نقطه ۱- به نقطه ۸ می‌رود.

در مورد تابع حرکت متحرک‌هایی مانند $g(t)$، دیدیم مشتق آنها در یک نقطهٔ دلخواه، تابع جدیدی می‌سازد که مقدار آن در هر لحظهٔ t به صورت $g'(t)$ است. این تابع جدید را **مشتق تابع g** می‌نامند. به‌طور کلی مشتق یک تابع، به عنوان یک تابع جدید، به شکل زیر تعریف می‌شود:

تعریف

مشتق تابع

فرض کنید تابع f در تمام نقاط دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد. در این صورت مشتق آن در نقطهٔ دلخواه x با $f'(x)$ نشان داده می‌شود. به این ترتیب، تابع جدید f' با همان دامنهٔ f به‌دست می‌آید که آن را مشتق تابع f می‌نامند.

مثال ۸

مشتق تابع $f(x)=kx^{۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

مشتق این تابع را در نقطهٔ دلخواه x به‌صورت زیر حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{k(x+h)^{۲}-kx^{۲}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{kx^{۲}+۲kxh+kh^{۲}-kx^{۲}}{h}=\lim_{h\to ۰}(۲kx+kh)=۲kx$$

بنابراین برای تابع $f(x)=kx^{۲}$ داریم $f'(x)=۲kx$.

مثال ۹

مشتق تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را به‌دست آورید.

مشتق این تابع را در نقطهٔ دلخواه x از دامنهٔ تابع حساب می‌کنیم. چون x در دامنهٔ تابع است داریم: $x\neq ۰$.

$$g'(x)=\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{۱}{x+h}-\frac{۱}{x}}{h}=\lim_{h\to ۰}\frac{\frac{x-(x+h)}{(x+h)x}}{h}$$

$$=\lim_{h\to ۰}\frac{-h}{x(x+h)h}=\lim_{h\to ۰}\frac{-۱}{x(x+h)}=-\frac{۱}{x^{۲}}$$

بنابراین برای تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ داریم: $g'(x)=-\frac{۱}{x^{۲}}$.

کار درکلاس ۲

۱ مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) تابع $f(x)=۳x^۲-۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$.

ب) تابع $g(x)=\frac{۱}{x^۲}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$.

۲ متحرکی روی یک مسیر مستقیم با تابع حرکت $f(x)=-۴t^۲+۱۶t+۱$ در بازهٔ زمانی $[۰,۶]$ در حال حرکت است.

الف) سرعت این متحرک را در لحظهٔ دلخواه t از دامنهٔ تابع حرکت به‌دست آورید.

ب) این متحرک در لحظهٔ $t=۱$ در چه جهتی (جهت محور حرکت یا خلاف آن) حرکت می‌کند؟

پ) این متحرک در لحظهٔ $t=۴$ در چه جهتی حرکت می‌کند؟

ت) آیا می‌توان لحظه‌ای را یافت که متحرک در آن لحظه توقف کند؟

پ) این متحرک در چه زمان‌هایی رو به عقب (خلاف جهت محور حرکت) حرکت می‌کند؟

مسائل

۱ مشتق تابع $g(x)=2x-3x^2$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

۲ مشتق تابع $f(x)=x-\frac{2}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{0\}$ را به‌دست آورید.

۳ تابع حرکت متحرکی روی محور به‌صورت $g(t)=t^2-20t+1$ با دامنهٔ $[0,20]$ است. در اینجا t زمان بر حسب ثانیه و $g(t)$ مختص مکانی متحرک بر حسب متر است.

الف) سرعت متحرک را در لحظهٔ دلخواه t (در دامنهٔ تابع حرکت) به‌دست آورید.

ب) متحرک در لحظهٔ $t=0$ در کدام مکان قرار دارد و سرعت آن در این لحظه چقدر است و در کدام جهت در حال حرکت است؟

پ) متحرک پس از چند ثانیه از شروع حرکت، می‌ایستد و در کدام مکان می‌ایستد؟

ت) متحرک در لحظهٔ $t=20$ در کدام مکان قرار دارد و سرعت آن در این لحظه چقدر است و در کدام جهت در حال حرکت است؟

ث) چگونگی حرکت متحرک را در این بازهٔ زمانی توصیف کنید.

۳ــ تعبیر هندسی مشتق

گفتگو

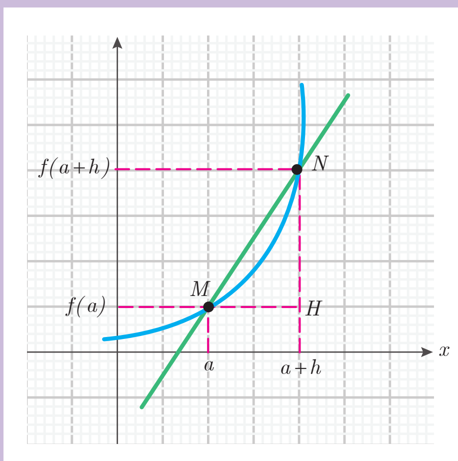
پس از یادگیری مشتق تابع‌ها، سؤال مهمی برای مسعود پیش آمد.

مسعود گفت: در گذشته نمودار یک تابع به ما کمک می‌کرد تا ویژگی‌های تابع (مانند حد، پیوستگی و غیره) را بهتر درک کنیم. آیا برای درک بهتر مشتق نیز می‌توانیم از نمودار استفاده کنیم؟

دبیر گفت: بله. مشتق یک تابع، تعبیر هندسی مهمی روی نمودار آن تابع دارد. با انجام فعالیت زیر می‌توانید تعبیر هندسی مشتق یک تابع را از روی نمودار آن درک کنید.

فعالیت ۲

در شکل روبه‌رو، نمودار یک تابع مانند f رسم شده است. روی نمودار، دو نقطهٔ M و N در نزدیکی هم انتخاب شده‌اند. طول نقطهٔ M را a و طول نقطهٔ N را $a+h$ در نظر بگیرید؛ h عددی مثبت است.



۱ مختصات نقطهٔ M را برحسب a و مختصات نقطهٔ N را برحسب a و h بنویسید.

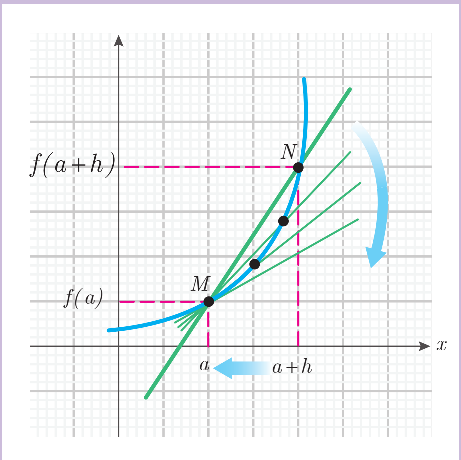
۲ طول پاره‌خط‌های MH و NH را برحسب مختصات M و N بنویسید.

۳ شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ M و N را بنویسید.

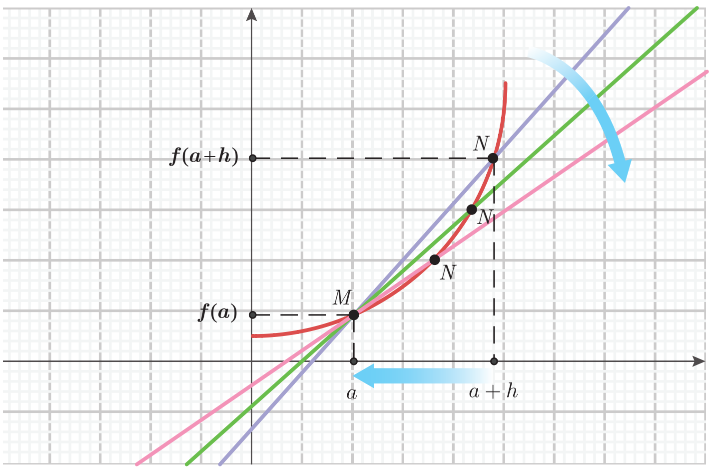
۴ چه ارتباطی بین شیب خط گذرنده از دو نقطهٔ M و N و مشتق تابع f در نقطهٔ a مشاهده می‌کنید؟

۵ با تغییر h، مکان نقطهٔ N روی نمودار تابع تغییر می‌کند. اگر h را به صفر نزدیک کنیم، نقطهٔ N به چه نقطه‌ای نزدیک می‌شود؟

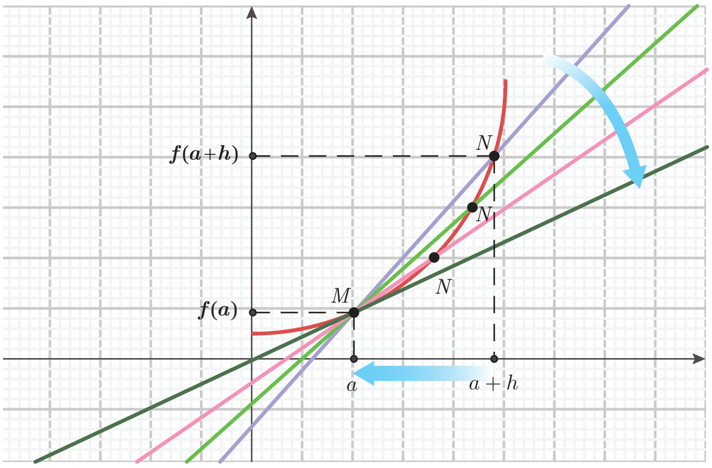
۶ اگر h را به صفر نزدیک کنیم، خط گذرنده از دو نقطهٔ M و N نسبت به نمودار تابع، چه حالتی پیدا می‌کند؟ با توجه به بند (۴)، شیب این خط به چه عددی نزدیک می‌شود؟



در فعالیت قبل، $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ نقطه‌ای ثابت روی نمودار تابع f در نظر گرفته شده است. به ازای یک عدد کوچک و مثبت h، نقطهٔ $N=\begin{bmatrix} a+h \\ f(a+h) \end{bmatrix}$ نقطه‌ای دیگر روی نمودار f است که نزدیک M قرار دارد. در شکل زیر خط گذرنده از M و N رسم شده است.



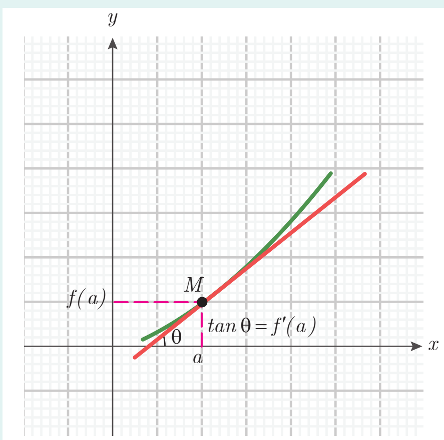
شکل بالا نشان می‌دهد که مقدار $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ همان شیب خط MN است. با نزدیک شدن h به صفر، نقطهٔ N روی نمودار تابع، به نقطهٔ M نزدیک می‌شود و خط MN به خط مماس بر نمودار تابع در نقطهٔ M نزدیک می‌شود.



با توجه به نمودار بالا، شیب خط مماس همان حد شیب خط MN در $h=0$ (یعنی $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$) است. از طرف دیگر، این حد، همان مشتق تابع f در a است؛ یعنی مشتق تابع f در a، برابر شیب خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ است.

مشتق و شیب خط مماس بر نمودار تابع

فرض کنید تابع f در نقطهٔ a از دامنهٔ خود مشتق‌پذیر باشد. در این صورت، $f'(a)$ نشان‌دهندهٔ شیب خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $M=\begin{bmatrix} a \\ f(a) \end{bmatrix}$ است. از آنجا که شیب هر خط همان تانژانت زاویهٔ بین خط و محور طول‌هاست، طبق شکل داریم: $f'(a)=\tan\theta$

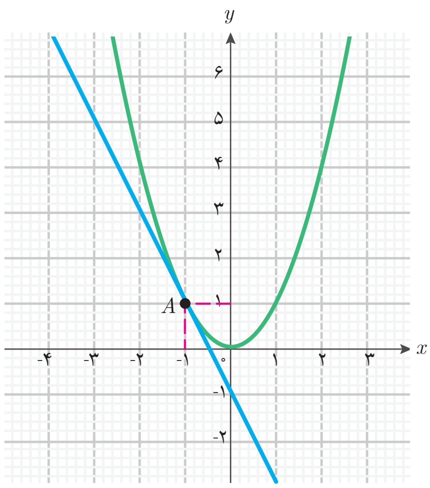


مثال ۱۰

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $f(x)=x^{۲}$ را در نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}$ بیابید.

شیب خط مماس در این نقطه، برابر $f'(-۱)$ است. می‌دانیم $f'(x)=۲x$، بنابراین $f'(-۱)=-۲$ و شیب خط مماس برابر ۲- است. با توجه به آنکه معادلهٔ یک خط با شیب m به صورت $y=mx+b$ است، معادلهٔ خط مماس به صورت $y=-۲x+b$ خواهد بود. برای یافتن b می‌دانیم این خط از نقطهٔ $A=\begin{bmatrix}-۱\\ ۱\end{bmatrix}$ می‌گذرد. پس مختصات نقطهٔ A در معادلهٔ خط مماس صدق می‌کند و داریم: $۱=-۲\times(-۱)+b$ که نتیجه می‌دهد $b=-۱$. بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از: $y=-۲x-۱$.

به کمک جئوجبرا نمودار تابع f و این خط را رسم می‌کنیم که به‌صورت زیر خواهد شد.



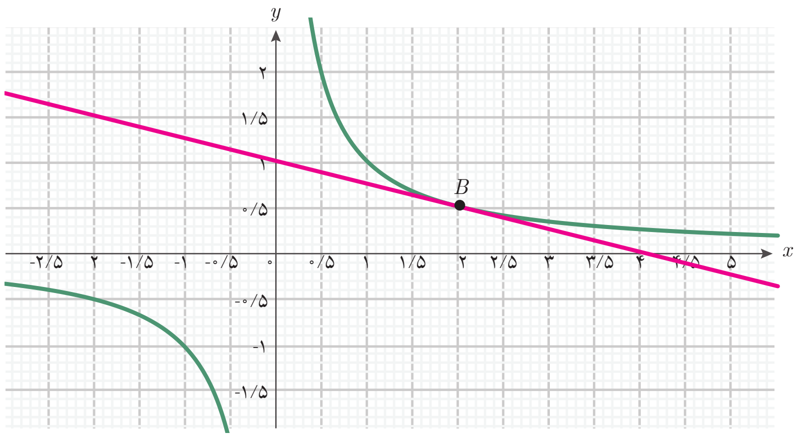
مثال ۱۱

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=\dfrac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در نقطهٔ $B=\begin{bmatrix}۲\\ \dfrac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ بیابید.

شیب خط مماس در این نقطه، برابر $g'(۲)$ است. می‌دانیم $g'(x)=\dfrac{-۱}{x^{۲}}$. بنابراین، $g'(۲)=-\dfrac{۱}{۴}$ و معادلهٔ خط مماس به صورت $y=-\dfrac{۱}{۴}x+b$ است. برای یافتن b می‌دانیم این خط از نقطهٔ

$B=\begin{bmatrix}۲\\ \frac{۱}{۲}\end{bmatrix}$ می‌گذرد. پس، $\frac{۱}{۲}=-\frac{۱}{۴}\times ۲+b$ که نتیجه می‌دهد $b=۱$. بنابراین معادلهٔ خط مماس عبارت است از: $y=-\frac{۱}{۴}x+۱$.

به کمک جئوجبرا نمودار تابع f و این خط را رسم می‌کنیم، که به شکل زیر خواهد بود.

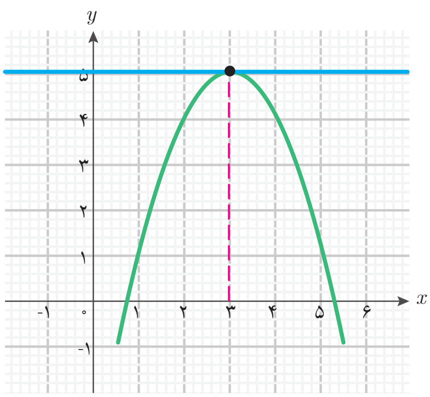


مثال ۱۲

معادلهٔ خط مماس بر نمودار تابع $g(x)=-x^۲+۶x-۴$ را در نقطهٔ به طول ۳ روی نمودار تابع بیابید.

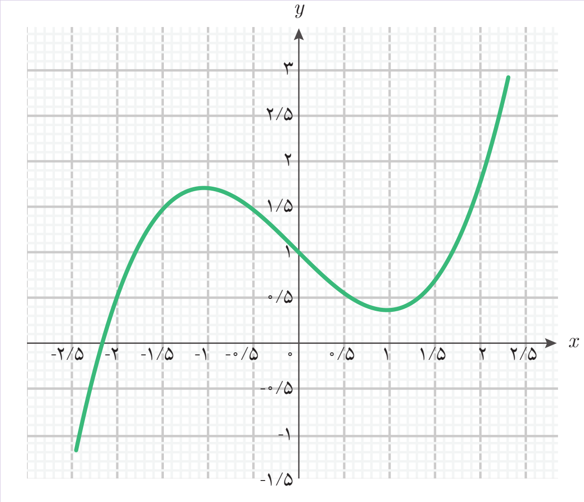
از آنجا که $g(۳)=۵$، نقطهٔ مورد نظر روی نمودار دارای مختصات $\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}$ است. شیب خط مماس در این نقطه، برابر $g'(۳)$ است. با محاسبهٔ مشتق این تابع داریم: $g'(x)=-۲x+۶$، بنابراین: $g'(۳)=۰$.

وقتی شیب خط مماس صفر باشد، یعنی خط مماس با محور طول‌ها موازی است. پس، معادلهٔ خط مماس به صورت $y=b$ است. از آنجا که این خط از نقطهٔ $\begin{bmatrix}۳\\ ۵\end{bmatrix}$ می‌گذرد، نتیجه می‌شود: $b=۵$. پس معادلهٔ خط مماس به صورت $y=۵$ است. نمودار این تابع و خط مماس به‌صورت شکل روبه‌رو است:



کار در کلاس ۳

الف) نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{۳}x^{۳}-x+۱$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ به شکل زیر است. خط مماس بر این نمودار را در نقطهٔ $\begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$ با خط‌کش رسم کنید.



ب) شیب خطی را که رسم کرده‌اید، بیابید.

پ) با مشتق‌گیری از تابع f در $x=۲$ شیب خط مماس بر نمودار f را در $\begin{bmatrix} ۲ \\ \frac{۵}{۳} \end{bmatrix}$ بیابید و با شیب خطی که خود رسم کرده‌اید مقایسه کنید. در صورت وجود اختلاف، دلیل آن را بیان کنید.

مسائل

۱ تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}-۴x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. معادلهٔ خط مماس بر نمودار این تابع را در نقطهٔ $\begin{bmatrix}۲\\-۶\end{bmatrix}$ به‌دست آورید. با رسم نمودار این تابع و نمودار خط مماس، درستی معادلهٔ خط مماس را بررسی کنید.

۲ تابع $f(x)=\frac{۲}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را درنظر بگیرید. آیا نقطه‌ای هست که خط مماس بر نمودار این تابع، موازی محور طول‌ها باشد؟ چرا؟

۳ تابع $f(x)=\frac{۱}{۲}x^{۲}+۲x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید.

الف) به کمک یک لغزنده در جئوجبرا، خط‌هایی به معادلهٔ $y=۳x+b$ را به ازای مقادیر مختلف b رسم کنید. آیا یکی از این خط‌ها بر نمودار تابع f مماس می‌شود؟

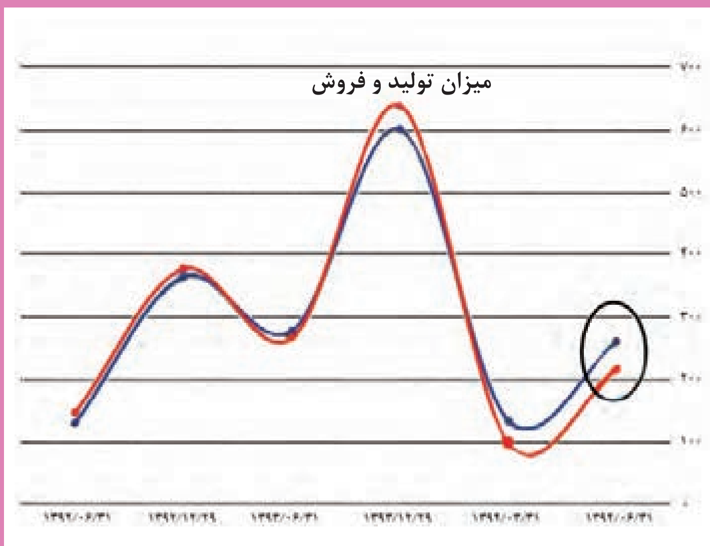
ب) با استفاده از مشتق f نقطه‌ای را روی نمودار این تابع به‌دست آورید که خط مماس در آن نقطه موازی خط $y=۳x$ باشد.

استانداردهای ارزشیابی پودمان ۴

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکردی (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان چهارم: درک مفهوم مشتق	انجام محاسبات مشتق تابع در یک نقطه با حدگیری	حل مسائل مرتبط با مشتق تابع‌ها	بالاتر از حد انتظار	☐ مدل‌سازی و حل مسائل زندگی واقعی (مسائل حل‌نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با مشتق تابع‌ها	۳
			حد انتظار	☐ حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی مرتبط با مشتق تابع‌ها	۲
	تعیین، توصیف و تفسیر سرعت لحظه‌ای با استفاده از مشتق تابع‌ها		پایین‌تر از حد انتظار	☐ درک و کاربرد مفاهیم و روابط برای پیدا کردن سرعت لحظه‌ای متحرک ☐ شیب خط مماس بر نمودار در نقطه مشخص شده به کمک مشتق	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					

پودمان پنجم

محاسبات مشتق و کاربردها



پیش‌بینی تحولات اقتصادی مانند پیش‌بینی تحولات بازار و قیمت‌ها و سود و زیان کارخانجات و رشد اقتصادی از طریق مدل‌سازی ریاضی اقتصاد با تابع‌ها و مشتق تابع‌ها انجام می‌شود. شاید مهم‌ترین هدف برای هر بنگاه اقتصادی یافتن بیشترین سود و کمترین زیان باشد که عموماً در ارتباط با یافتن مشتق یک تابع و جایی است که مشتق آن تابع صفر می‌شود.

در اقتصاد کمیت‌های بسیاری وجود دارند که سلامت در اقتصاد معادل با آن است که برخی از آنها در طی زمان در حال افزایش و برخی دیگر در حال کاهش باشند. برای مثال، میزان تولیدات یک کشور کمیت مهمی است که انتظار داریم در طول زمان در حال افزایش باشد. میزان بیکاری و فقر نیز کمیت‌هایی هستند که امیدواریم در طی زمان در حال کاهش باشند.

۱ــ محاسبهٔ مشتق تابع‌ها

گفتگو

حمید در ایام تعطیلات با قطار به مسافرت رفته بود. در طول راه، وقتی از پنجرهٔ قطار به بیرون نگاه می‌کرد، با خود فکر کرد: اگر قطار با سرعت ثابتی در حال حرکت باشد و من نیز در راهروی قطار با سرعت ثابتی حرکت کنم، سرعت من نسبت به زمین چقدر خواهد بود؟ بعد از تعطیلات، حمید سؤال خود را در کلاس درس ریاضی مطرح کرد.

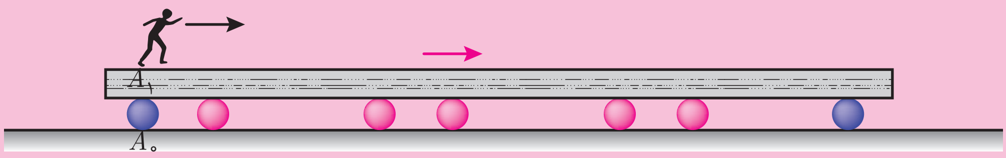
دبیر گفت: می‌دانید که سرعت یک متحرک در هر لحظه با محاسبهٔ مشتق تابع حرکت در آن لحظه به‌دست می‌آید. بنابراین برای یافتن سرعت حرکت یک متحرک نسبت به زمین باید تابع حرکت آن متحرک را نسبت به زمین به‌دست آوریم.

سعید گفت: تابع حرکت حمید نسبت به زمین را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟

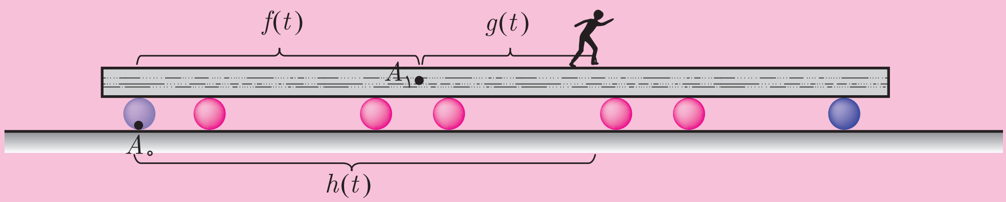
دبیر گفت: بهتر است در یک مثال ساده‌تر این مسئله را بررسی کنیم. در برخی فرودگاه‌ها و اماکن عمومی، پیاده‌روهای متحرکی ساخته‌اند که افراد روی تسمهٔ آنها می‌ایستند و جابه‌جا می‌شوند. در فعالیت زیر با بررسی سرعت فردی که روی چنین تسمه‌ای در حال حرکت است، مسئلهٔ حمید را می‌توانید حل کنید.

فعالیت ۱

فرض کنید تسمهٔ یک پیاده‌روی متحرک، با سرعت ثابت ۳ متر بر ثانیه در حال حرکت باشد و فردی در لحظهٔ $t=۰$ در نقطهٔ ثابت $A_۱$ روی تسمه قرار گرفته و با سرعت ثابت ۵۰ سانتی‌متر بر ثانیه در حال راه رفتن باشد. نقطهٔ $A_۰$ محل نصب پایهٔ پیاده‌روی متحرک روی زمین است. در لحظهٔ $t=۰$ نقطهٔ $A_۱$ (روی تسمه) و نقطهٔ $A_۰$ (روی زمین) در یک مکان قرار دارند.



تابع حرکت تسمه نسبت به زمین (فاصله $A_۱$ تا $A_۰$) به‌صورت $f(t)=۳t$ و تابع حرکت فرد نسبت به پیاده‌روی متحرک (فاصلهٔ فرد تا $A_۱$) به‌صورت $g(t)=\frac{۱}{۲}t$ است (زمان t برحسب ثانیه و فاصله‌ها برحسب متر هستند). فرض کنید دامنهٔ این دو تابع، بازهٔ زمانی $[۰,۱۰]$ باشد. پس از گذشت t ثانیه، وضعیت فرد و تسمه به شکل زیر خواهد بود:



۱ مقادیر $f(۰)$ و $g(۰)$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۲ مقادیر $f(۱)$ و $g(۱)$ و $f(۱)+g(۱)$ چه چیزی را نشان می‌دهند؟

۳ قانون تابع $h(t)=f(t)+g(t)$ را در بازهٔ $[۰,۱۰]$ به‌دست آورید. این تابع چه چیزی را نشان می‌دهد؟

۴ مقدارهای $f'(t)$ و $g'(t)$ و $h'(t)$ نشان‌دهندهٔ چه چیزی هستند؟

۵ $f'(t)$ و $g'(t)$ و $h'(t)$ را به‌دست آورید. چه رابطه‌ای بین آنها وجود دارد؟

وقتی که فرد روی پیاده‌روی متحرک شروع به راه رفتن می‌کند، مسافتی که فرد نسبت به زمین طی می‌کند (فاصلهٔ فرد تا A_0) برابر است با مجموع مسافت طی شده توسط تسمه (فاصلهٔ A_1 تا A_0) با مسافت طی شده توسط فرد روی تسمه (فاصلهٔ فرد تا A_1). بنابراین تابع حرکت این فرد نسبت به زمین به‌صورت مجموع دو تابع $f(t)$ و $g(t)$ خواهد بود. یعنی در زمان t، فاصلهٔ فرد از A_0 به‌صورت $h(t) = f(t) + g(t)$ می‌باشد. سرعت حرکت این فرد نسبت به تسمه با مشتق‌گیری از تابع حرکت $g(t)$ به‌دست می‌آید، یعنی $g'(t) = \frac{1}{2}$. همچنین سرعت حرکت تسمه نسبت به زمین به‌صورت $f'(t) = 3$ است. سرعت حرکت فرد نسبت به زمین به‌صورت $h'(t) = 3 + \frac{1}{2}$ است. با مقایسهٔ سرعت‌ها (مشتق سه تابع) می‌توان دید سرعت فرد نسبت به زمین برابر است با مجموع سرعت فرد نسبت به تسمه و سرعت تسمه نسبت به زمین؛ یعنی **مشتق مجموع این دو تابع با مجموع مشتق‌های آنها برابر است.**

گفتگو

سعید گفت: تابع‌های ارائه شده در فعالیت بالا همگی خطی بودند و مشتق هر کدام از آنها که سرعت را نشان می‌داد، مقدار ثابتی بود. آیا نتیجه‌ای که در این فعالیت گرفتیم، برای همهٔ تابع‌ها برقرار است؟

دبیر گفت: با توجه به اینکه برای محاسبهٔ مشتق باید از حدگیری استفاده شود و حد مجموع دو تابع با مجموع حدهای آنها برابر است، این ویژگی برای همهٔ تابع‌ها برقرار است.

برای هر دو تابع مشتق‌پذیر، ویژگی زیر برقرار است:

مشتق مجموع دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ یکسان و در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع $h(x) = f(x) + g(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$h'(a) = f'(a) + g'(a)$$

قانون مشتق جمع دو تابع، برای مجموع بیشتر از دو تابع نیز برقرار است. از این قانون می‌توان برای پیدا کردن مشتق تابع‌های مختلف استفاده کرد.

مثال ۱

مشتق تابع $h(x) = x^2 + 4x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

این تابع را می‌توان مجموع تابع $f(x) = x^2$ و تابع خطی $g(x) = 4x$ در نظر گرفت. می‌دانیم $f'(x) = 2x$ و $g'(x) = 4$، بنابراین:

$$h'(x) = f'(x) + g'(x) = 2x + 4$$

امکان تعمیم قانون مشتق مجموع دو تابع، به مشتق حاصل‌ضرب دو تابع اولین سؤالی بود که توسط یکی دیگر از هنرجویان مطرح شد.

گفتگو

مسعود گفت: آیا برای به‌دست آوردن مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، می‌توانیم مشتق آنها را در هم ضرب کنیم؟

سعید گفت: این سؤال برای من هم پیش آمده بود. برای بررسی درستی این حدس، یک مثال برای خودم زدم و درستی آن را بررسی کردم. تابع $f(x) = x^۲$ را به‌صورت $f(x) = x.x$ نوشتم و این حدس را آزمایش کردم.

$$f'(x) = ۱\times۱=۱$$

اما دیده بودیم $f'(x) = ۲x$، پس تساوی بالا نادرست است و این حدس اشتباه بود.

دبیر گفت: بله. این مثال، حدس مسعود را رد می‌کند، یعنی یک مثال نقض برای آن است.

برای یافتن مشتق حاصل‌ضرب دو تابع می‌توان از تعریف مشتق استفاده کرد. در حالت کلی مشتق حاصل‌ضرب دو تابع به شکل زیر است.

مشتق حاصل ضرب دو تابع

فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع با دامنهٔ یکسان و در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند. در این صورت تابع $h(x)=f(x).g(x)$ در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$h'(a) = f'(a)\,.\,g(a) + f(a)\,.\,g'(a)$$

مثال ۲

به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق تابع‌های $u(x)=x^۲$ و $v(x)=x^۳$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

می‌توان تابع $u(x)$ را به صورت $u(x)=x\,.\,x$ در نظر گرفت. اگر قرار دهیم $f(x)=x$ و $g(x)=x$ داریم $u(x) = f(x)\,.\,g(x)$. می‌دانیم $f'(x) = ۱$ و $g'(x) = ۱$. بنابراین، مشتق تابع u در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از :

$$u'(x) = f'(x)\,.\,g(x) + f(x)\,.\,g'(x) = ۱\times x + x\times ۱ = ۲x$$

همچنین تابع $v(x)$ را می‌توان به‌صورت $v(x)=x^۲.x$ در نظر گرفت، اگر قرار دهیم $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x$ داریم $v(x)=f(x).g(x)$. می‌دانیم $f'(x) = ۲x$ و $g'(x) = ۱$. بنابراین مشتق تابع v در

نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از:

$$v'(x) = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x) = ۲x \,.\, x + x^۲ \times ۱ = ۳x^۲$$

مثال ۳

مشتق تابع $h(x) = \frac{۷}{x}$ با دامنه $\mathbb{R} - \{۰\}$ را به‌دست آورید.

می‌توان تابع $h(x)$ را به‌صورت $h(x) = ۷ \times \frac{۱}{x}$ در نظر گرفت. اگر قرار دهیم $f(x) = ۷$ (تابع ثابت) و $g(x) = \frac{۱}{x}$ داریم: $u(x) = f(x)\ g(x)$. می‌دانیم $f'(x) = ۰$ و $g'(x) = -\frac{۱}{x^۲}$. بنابراین مشتق تابع h در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از:

$$h'(x) = f'(x).g(x) + f(x).g'(x) = ۰ \times \frac{۱}{x} + ۷ \times \frac{-۱}{x^۲} = -\frac{۷}{x^۲}$$

به‌طور کلی، اگر g تابعی مشتق‌پذیر و a یک عدد حقیقی باشد، می‌توانیم تابع $h(x) = ag(x)$ را در نظر بگیریم. با در نظر گرفتن تابع ثابت $f(x) = a$ می‌توان تابع h را به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع f و g در نظر گرفت. بنابراین مشتق تابع h در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع عبارت است از:

$$h'(x) = f'(x) \,.\, g(x) + f(x) \,.\, g'(x) = ۰ \times g(x) + ag'(x) = ag'(x)$$

مثال ۴

فرض کنید تابع $f(x) = \sqrt{x}$ با دامنهٔ $(۰, +\infty)$ در نقطهٔ دلخواه x مشتق‌پذیر باشد. مشتق f را به‌دست آورید.

می‌توان نوشت: $f(x).f(x) = \sqrt{x} \,.\, \sqrt{x} = x$ ؛ با مشتق‌گیری از دو طرف تساوی داریم[۱]:

$$\big(f(x).f(x)\big)' = ۱$$

با استفاده از فرمول مشتق حاصل‌ضرب دو تابع خواهیم داشت:

$$f'(x)\,.f(x) + f(x)\,.f'(x) = ۱$$

بنابراین: $۲f'(x)\,.f(x) = ۱$

یعنی: $f'(x) = \frac{۱}{۲f(x)} = \frac{۱}{۲\sqrt{x}}$.

۱ـ توجه داشته باشید که دو تابع مساوی مشتق‌پذیر، مشتق مساوی دارند.

کار در کلاس ۱

با استفاده از تساوی $x.\frac{1}{x}=1$ که در $\mathbb{R}-\{0\}$ برقرار است و به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق تابع $\frac{1}{x}$ را در نقطهٔ دلخواه $x\neq 0$ به‌دست آورید.

به کمک مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، مشتق بسیاری از تابع‌ها را می‌توان یافت. در فعالیت زیر مشتق تابع $f(x)=ax^n$ را که a یک عدد حقیقی و n یک عدد طبیعی دلخواه است، به‌دست می‌آوریم.

فعالیت ۲

۱ جدول زیر را کامل کنید.

$f(x)$	x	x^2	x^3	x^4	x^5
$f'(x)$	1	$2x$	$3x^2$	...	...

۲ چه رابطه‌ای بین قانون $f(x)$ و ضریب و توان در $f'(x)$ وجود دارد؟

۳ اگر $n\in\mathbb{N}$ و $f(x)=x^n$، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

۴ اگر $n\in\mathbb{N}$ و a یک عدد حقیقی و $f(x)=ax^n$، قاعده‌ای برای یافتن $f'(x)$ پیشنهاد دهید.

در فعالیت بالا، با کامل کردن جدول می‌توان دید وقتی n برابر با ۱، ۲، ۳، ۴ یا ۵ است، مشتق تابع $f(x)=x^n$ به‌صورت $f'(x)=nx^{n-1}$ می‌باشد. این تساوی برای هر عدد طبیعی n نیز برقرار است.
برای تابع $f(x)=ax^n$ نیز داریم: $f'(x)=nax^{n-1}$.
به کمک مشتق جمع تابع‌ها و مشتق تابع x^n می‌توان مشتق تابع چندجمله‌ای

$$f(x)=x^n+x^{n-1}+\dots+x+1$$

را به‌دست آورد. در واقع $f'(x)=nx^{n-1}+(n-1)x^{n-2}+\dots+1$.

همچنین مشتق تابع چندجمله‌ای

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\dots+a_1x+a_0$$

به‌صورت زیر است:

$$f'(x)=na_nx^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\dots+a_1$$

پس از آشنایی با روش محاسبهٔ مشتق مجموع و حاصل‌ضرب دو تابع، این سؤال پیش آمد که مشتق تقسیم دو تابع چگونه به‌دست می‌آید؟

گفتگو

حمید گفت: بسیاری از تابع‌ها به‌صورت تقسیم دو تابع هستند. مشتق این گونه تابع‌ها را چگونه محاسبه می‌کنیم؟

دبیر گفت: فرض کنید f و g دو تابع مشتق‌پذیر با دامنهٔ یکسان D باشند و $g(x) \neq 0$. می‌توانید تابع $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ را با همان دامنهٔ D در نظر بگیرید. اگر فرض کنیم تابع h مشتق‌پذیر باشد، با استفاده از تساوی $f(x)=h(x).g(x)$ و مشتق حاصل‌ضرب دو تابع، می‌توان مشتق تابع h را به‌دست آورد.

حمید گفت: من این مسئله را به شکل زیر حل کردم. برای سادگی محاسبه به جای $f(x)$ از f و به جای $f'(x)$ از f' استفاده کردم.

$$f = h \, . \, g$$

$$f' = h' \, . \, g + h \, . \, g'$$

به جای h معادل آن یعنی $\dfrac{f}{g}$ را قرار دادم:

$$f' = h'.g + \frac{f}{g}.g'$$

$$h'.g = f' - \frac{f.g'}{g}$$

$$h'.g = \frac{f'.g - f.g'}{g}$$

$$h' = \frac{f'.g - f.g'}{g^2}$$

دبیر گفت: محاسبهٔ شما درست است.

مشتق تقسیم دو تابع

فرض کنید f و g دو تابع با دامنهٔ یکسان و در $x=a$ مشتق‌پذیر باشند و به ازای هر x از دامنه، $g(x) \neq 0$. در این صورت، تابع $h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ نیز در $x=a$ مشتق‌پذیر است و داریم:

$$h'(a) = \frac{f'(a).g(a) - f(a).g'(a)}{(g(a))^2}$$

مثال ۵

مشتق تابع $u(x)=\dfrac{1}{x-1}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{1\}$ را در یک نقطهٔ دلخواه از دامنهٔ آن به‌دست آورید.

اگر $f(x)=1$ و $g(x)=x-1$ را در نظر بگیریم، داریم: $u(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. می‌دانیم $f'(x)=0$ و $g'(x)=1$. بنابراین مشتق تابع u در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق تقسیم دو تابع عبارت است از:

$$u'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{0\times(x-1)-1\times 1}{(x-1)^2}=-\frac{1}{(x-1)^2}$$

مثال ۶

مشتق تابع $v(x)=\dfrac{x^2}{x+1}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{-1\}$ را در یک نقطهٔ دلخواه از دامنهٔ آن به‌دست آورید.

اگر $f(x)=x^2$ و $g(x)=x+1$ را در نظر بگیریم، داریم: $v(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$. می‌دانیم $f'(x)=2x$ و $g'(x)=1$. بنابراین مشتق تابع v در نقطهٔ دلخواه x طبق فرمول مشتق تقسیم دو تابع عبارت است از:

$$v'(x)=\frac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}=\frac{2x\times(x+1)-x^2\times 1}{(x+1)^2}=\frac{x^2+2x}{(x+1)^2}$$

کار در کلاس ۲

مشتق تابع‌های زیر را به‌دست آورید. دامنه‌های این تابع‌ها را بازهٔ $(0\,,\,+\infty)$ در نظر بگیرید.

الف) $f(x)=x^2-4x+5$

ب) $g(x)=x^2+4\sqrt{x}$

پ) $h(x)=\dfrac{x^2-4x}{3x+4}$

مسائل

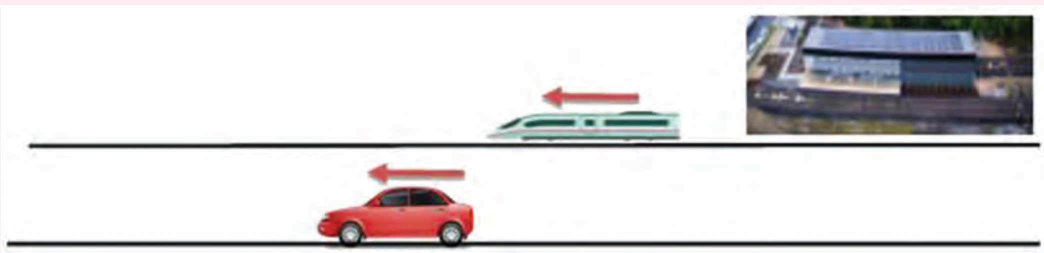
۱ مشتق تابع‌های زیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^۳ + ۴x + ۱$

ب) $g(x) = (x^۲ + ۱)(x^۲ - ۳)$

پ) $h(x) = \frac{۳x + ۱}{x^۲ + ۱}$

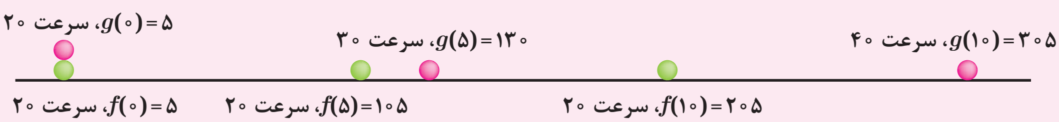
۲ قطاری در یک مسیر مستقیم و با سرعت ثابت از ایستگاه دور می‌شود فاصلهٔ این قطار برحسب متر در لحظهٔ t (برحسب ثانیه) از ایستگاه $f(t)=۲۰t+۵$ است. ماشینی در جاده‌ای به موازات مسیر حرکت قطار، هم‌جهت با حرکت قطار از ایستگاه دور می‌شود. فاصلهٔ این ماشین (برحسب متر) در لحظهٔ t (برحسب ثانیه) $g(t)=t^۲+۲۰t+۵$ است. فرض کنید این وضعیت در بازهٔ زمانی $[۰,۱۰]$ برقرار باشد.



الف) فاصلهٔ قطار را از ایستگاه و سرعت آن را در زمان‌های ۱۰ و ۵ و $t=۰$ به دست آورید.

ب) فاصلهٔ ماشین را از ایستگاه و سرعت آن را در زمان‌های ۱۰ و ۵ و $t=۰$ به دست آورید.

پ) شکل زیر مکان قطار و ماشین و سرعت آنها را در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۵$ و $t=۱۰$ نشان می‌دهد.



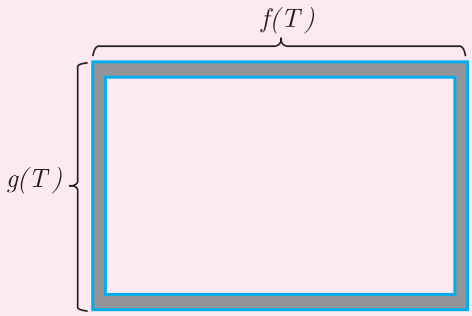
■ فاصلهٔ ماشین از قطار در لحظه‌های $t=۰$ به $t=۵$ و $t=۱۰$ به دست آورید.

■ در لحظه‌های $t=۰$ و $t=۵$ و $t=۱۰$ سرعت قطار .... است ولی سرعت ماشین .... است.

ت) یکی از مسافران قطار به ماشین نگاه می‌کند. به کمک تابع $h(t)=g(t)-f(t)$ سرعت دور شدن ماشین از قطار را از نظر مسافر در لحظهٔ t به دست آورید.

۳ اگر f تابعی مشتق‌پذیر باشد، مشتق تابع $u(x)=(f(x))^۲$ را برحسب f و f' به‌دست آورید. به کمک این رابطه مشتق تابع $v(x)=(۴x^۲-۱)^۲$ را به‌دست آورید.

۴ فلزها بر اثر گرما انبساط می‌یابند. فرض کنید یک قاب مستطیلی فلزی داریم که طول و عرض آن در دمای T به‌صورت $f(T)=۱۵(۱+\frac{۱}{۸}T)$ و $g(T)=۱۰(۱+\frac{۱}{۸}T)$ است. مقادیر T(دما) در بازهٔ $[۰,۴۰]$ است. T برحسب سانتی‌گراد و مقدار این تابع‌ها بر حسب سانتی‌متر است.



الف) سرعت تغییر اندازهٔ اضلاع را نسبت به تغییر درجهٔ حرارت به‌دست آورید.

ب) سرعت تغییر مساحت این مستطیل را نسبت به تغییر درجه حرارت به‌دست آورید.

۲ــ تابع‌های صعودی و نزولی و مشتق آنها

گفتگو

سعید یاد گرفته بود که مشتق یک تابع، سرعت تغییرات تابع را نشان می‌دهد. اما او مشاهده کرد تابع‌هایی وجود دارند که مشتق آنها در برخی نقاط، عددی منفی است و برای او این سؤال پیش آمد که منفی شدن مشتق چه معنایی دارد؟

سعید گفت: من فکر می‌کردم که مشتق یک تابع در یک نقطه، سرعت تغییرات مقادیر تابع را در آن نقطه نشان می‌دهد. اما مشتق برخی تابع‌ها در برخی نقاط، عددی منفی است. منفی شدن مشتق، چه معنایی دارد؟

دبیر گفت: به نکتهٔ خوبی توجه کردی. مشتق یک تابع در یک نقطه، چگونگی تغییرات تابع در نزدیکی‌های آن نقطه را نشان می‌دهد. با انجام فعالیت زیر می‌توانید این وضعیت را بررسی کنید.

فعالیت ۳

۱ تابع $f(x) = x^2$ را با دامنهٔ $(0 , +\infty)$ در نظر بگیرید. جدول زیر برخی از مقادیر تابع را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$f(x)$	۰/۲۵	۱	۲۵	...	...	...	...

۲ با افزایش مقادیر x ، مقادیر $f(x)$ (از لحاظ افزایش یا کاهش) چگونه تغییر می‌کنند؟

۳ مشتق این تابع را به‌دست آورید. علامت مشتق تابع در این نقاط چگونه است؟

۴ تابع $g(x) = -x^2$ را با دامنهٔ $(0 , +\infty)$ در نظر بگیرید. جدول زیر برخی از مقادیر تابع را نشان می‌دهد. این جدول را کامل کنید.

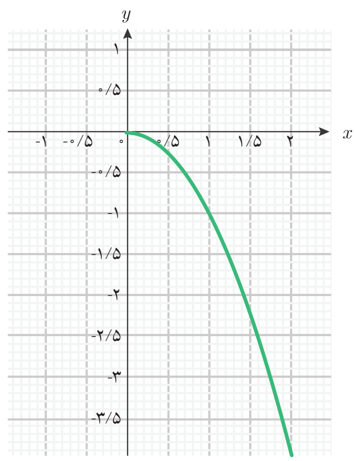
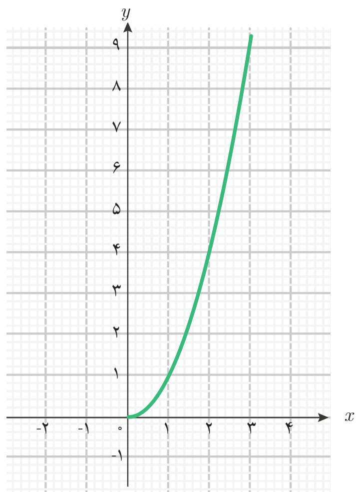
x	۰/۵	۱	۵	۱۰	۳۰	۵۰	a
$g(x)$	-۰/۲۵	-۱	-۲۵	...	...	...	...

۵ با افزایش مقادیر x، مقادیر $g(x)$ (از لحاظ افزایش یا کاهش) چگونه تغییر می‌کنند؟

۶ مشتق این تابع را به‌دست آورید. علامت مشتق تابع در این نقاط چگونه است؟

۷ با توجه به نتایج بالا به نظر شما چه رابطه‌ای بین رفتار افزایشی یا کاهشی مقادیر یک تابع و علامت مشتق آن تابع برقرار است؟

در این فعالیت دو تابع خاص را بررسی کردید که یکی رفتاری افزایشی و دیگری رفتاری کاهشی داشت. ویژگی‌های این دو تابع را می‌توانید در جدول زیر مشاهده کنید.

تابع	**$g(x) = -x^2$ با دامنهٔ $(0\ ,+\infty)$**	**$f(x) = x^2$ با دامنهٔ $(0\ ,+\infty)$**
نمودار		
رفتار تابع	رفتار کاهشی	رفتار افزایشی
ویژگی رفتاری	با افزایش مقادیر متغیر، مقادیر تابع کاهش می یابند.	با افزایش مقادیر متغیر، مقادیر تابع افزایش می یابند.
علامت مقادیر مشتق تابع	منفی	مثبت

رابطه‌ای که بین رفتارهای تابع و علامت مشتق تابع در جدول بالا مشاهده می‌شود، برای تابع‌های دیگر نیز برقرار است. برخی تابع‌ها **رفتاری افزایشی** دارند (مانند تابع f در فعالیت (۳))؛ یعنی با افزایش مقدار

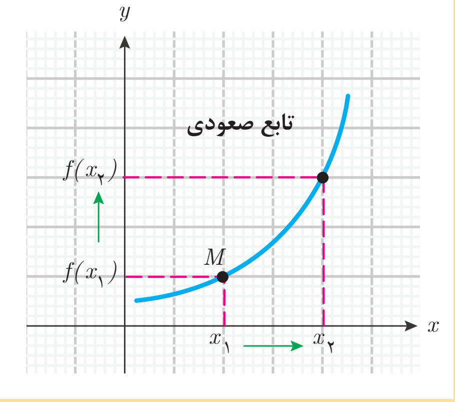
متغیر، مقدار تابع نیز افزایش می‌یابد. مشتق این گونه تابع‌ها (در صورت وجود) در همهٔ نقاط دامنهٔ خود مثبت خواهند بود. اما، برخی تابع‌ها **رفتار کاهشی** دارند (مانند تابع g در فعالیت (۳))؛ یعنی با افزایش مقدار متغیر، مقدار تابع کاهش می‌یابد. مشتق این‌گونه تابع‌ها (در صورت وجود) در همهٔ نقاط دامنهٔ خود منفی خواهد بود.

تابع‌هایی را که در دامنهٔ خود رفتاری افزایشی دارند، **تابع صعودی**، و تابع‌هایی را که در دامنهٔ خود رفتار کاهشی دارند، **تابع نزولی** می‌نامند.

تعریف

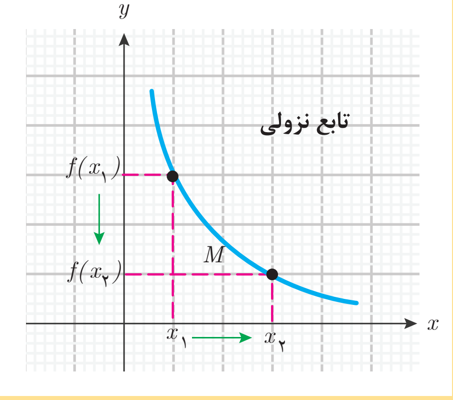
تابع‌های صعودی یا نزولی

فرض کنید f تابعی باشد که با افزایش مقدار متغیر از x_1 به x_2 (دو نقطهٔ دلخواه در دامنهٔ تابع)، مقدار تابع از $f(x_1)$ به $f(x_2)$ افزایش یابد؛ در این صورت f را یک **تابع صعودی** می‌نامند؛ یعنی صعودی بودن تابع f به معنای آن است که:



اگر x_1 و x_2 دو نقطه از دامنهٔ f باشند و $x_1 \leq x_2$ آنگاه $f(x_1) \leq f(x_2)$.

همچنین، اگر f تابعی باشد که با افزایش مقدار متغیر از x_1 به x_2 (دو نقطهٔ دلخواه در دامنهٔ تابع)، مقدار تابع از $f(x_1)$ به $f(x_2)$ کاهش یابد، در این صورت f را یک **تابع نزولی** می‌نامند؛ یعنی نزولی بودن تابع f به معنای آن است که:



اگر x_1 و x_2 دو نقطه از دامنهٔ f باشند و $x_1 \leq x_2$ آنگاه $f(x_2) \leq f(x_1)$.

اگر یک تابع صعودی مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در هر نقطه از دامنهٔ خود مثبت یا صفر خواهد بود. همچنین، اگر یک تابع نزولی مشتق‌پذیر باشد، مشتق آن در هر نقطه از دامنهٔ خود منفی یا صفر خواهد بود.

مثال ۷

مشتق تابع $f(x) = ۳x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید و وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی کنید.

می‌دانیم مشتق تابع‌های خطی در همهٔ نقاط، مقداری ثابت است که همان شیب خط (نمودار تابع) است، یعنی $f'(x)=۳>۰$. بنابراین مشتق این تابع در همهٔ نقاط، مثبت است و دیده می‌شود که این تابع در دامنهٔ خود صعودی است. زیرا برای دو عدد دلخواه $x_۱$ و $x_۲$، اگر $x_۱ \leq x_۲$ آنگاه $۳x_۱\leq ۳x_۲$ یعنی $f(x_۱)\leq f(x_۲)$.

به طور کلی، **همهٔ تابع‌های خطی با شیب مثبت، تابع‌هایی صعودی هستند.**

مثال ۸

مشتق تابع $f(x) = -۲x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید و وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را بررسی کنید.

می‌دانیم $f'(x) = -۲ < ۰$. بنابراین، مشتق این تابع در همهٔ نقاط، منفی است و به سادگی دیده می‌شود که این تابع در دامنهٔ خود نزولی است. زیرا برای دو عدد دلخواه $x_۱$ و $x_۲$، اگر $x_۱ \leq x_۲$ داریم $-۲x_۲ \leq -۲x_۱$ یعنی $f(x_۲)\leq f(x_۱)$.

به طور کلی، **همهٔ تابع‌های خطی با شیب منفی، تابع‌هایی نزولی هستند.**

گفتگو

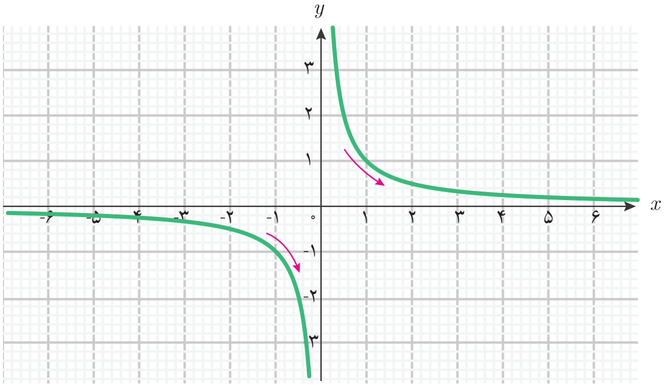
سعید گفت: آیا این نتیجه‌گیری درست است که مثبت بودن مشتق تابع، نشانهٔ صعودی بودن و منفی بودن مشتق تابع، نشانهٔ نزولی بودن تابع است؟

دبیر گفت: اگر دامنهٔ تابع یک بازه باشد، نتیجه‌گیری شما درست است. در واقع، اگر مشتق یک تابع در نقاط یک بازه از دامنهٔ تابع، مثبت باشد، تابع در آن بازه صعودی است. همچنین، اگر مشتق یک تابع در نقاط یک بازه از دامنهٔ تابع، منفی باشد، تابع در آن بازه نزولی است. اما اگر دامنه، اجتماعی از بازه‌ها باشد، صعودی یا نزولی بودن تابع را باید مستقیماً بررسی کرد.به مثال صفحه بعد توجه کنید.

مثال ۹

تابع $g(x)=\frac{۱}{x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۰\}$ را در نظر بگیرید. وضعیت صعودی یا نزولی بودن این تابع را بررسی کنید.

دیدیم $g'(x)=-\frac{۱}{x^۲}$. مشتق تابع g در همهٔ نقاط دامنهٔ خود منفی است. بنابراین، این تابع در بازه‌های $(۰\ ,\ +\infty)$ و $(-\infty\ ,\ ۰)$ که در دامنه قرار دارند، نزولی است. اما این تابع در تمام دامنهٔ خود نزولی نیست، مثلاً اگر $x_۱=-۱$ و $x_۲=۳$ داریم $x_۱<x_۲$ ولی $g(x_۱)=-۱$ و $g(x_۲)=\frac{۱}{۳}$. یعنی $g(x_۱)<g(x_۲)$.



نمودار تابع نیز نشان می‌دهد که اگرچه این تابع در هر یک از بازه‌های $(۰\ ,\ +\infty)$ و $(-\infty\ ,\ ۰)$ نزولی است ولی در تمام دامنهٔ خود نزولی نیست.

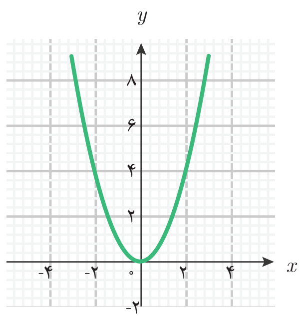
گفتگو

سعید گفت: اگر مشتق تابعی در برخی نقاط دامنهٔ خود، مثبت و در برخی نقاط دیگر از دامنهٔ خود، منفی باشد، در مورد وضعیت صعودی یا نزولی بودن این تابع چه می‌توانیم بگوییم؟

دبیر گفت: توجه داشته باشید که تابع‌ها، لزوماً همه جا صعودی یا همه جا نزولی نیستند. یک تابع ممکن است در قسمت‌هایی از دامنهٔ خود صعودی باشد و در قسمت‌های دیگری نزولی باشد.

مثال ۱۰

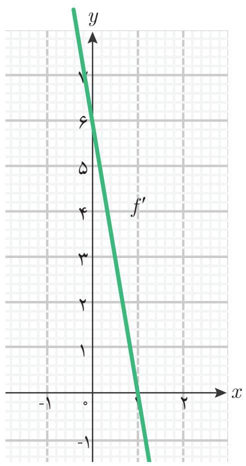
تابع $f(x)=x^۲$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. نمودار این تابع به شکل روبه‌رو است. مشتق این تابع به‌صورت $f'(x)=۲x$ است. علامت عدد $۲x$ همان علامت x است، در نتیجه مقادیر مشتق این تابع در بازهٔ $(-\infty,۰)$ منفی و تابع در این بازه نزولی است. همچنین مقادیر مشتق این تابع در بازهٔ $(۰,+\infty)$ مثبت است و تابع در این بازه صعودی است. بنابراین، این تابع در کل دامنهٔ خود نه صعودی و نه نزولی است، ولی در بازهٔ $(۰,+\infty)$ صعودی و دربازهٔ $(-\infty,۰)$ نزولی است.

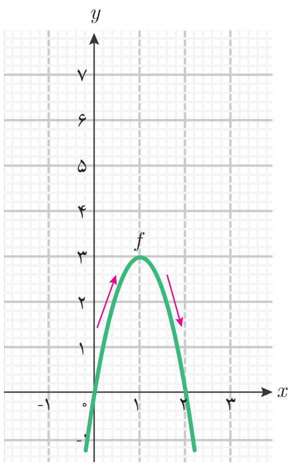


در حالت کلی، ممکن است تابع‌ها در دامنهٔ خود نه صعودی باشند و نه نزولی، ولی در برخی از بازه‌های دامنهٔ خود، صعودی و در برخی بازه‌های دیگر از دامنهٔ خود، نزولی باشند.
بازه‌هایی که تابع در آنها صعودی است، مشتق تابع در آن نقاط، در صورت وجود، مثبت یا صفر است. برعکس، اگر مشتق یک تابع در یک بازه مثبت یا صفر باشد، تابع در آن بازه صعودی است.
همچنین، بازه‌هایی که تابع در آنها نزولی است، مشتق تابع در نقاط آن، در صورت وجود، منفی یا صفر است. برعکس، اگر مشتق یک تابع در یک بازه منفی یا صفر باشد، تابع در آن بازه نزولی است.

مثال ۱۱

مشتق تابع $f(x) = -۳x^۲ + ۶x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را به‌دست آورید. مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟ این تابع در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟





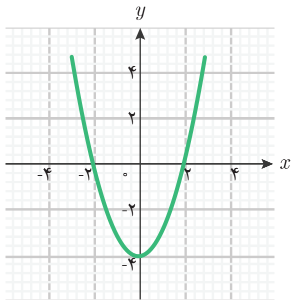
می‌دانیم $f'(x) = -۶x + ۶$. برای تشخیص نقاطی که f' به ازای آنها مثبت یا منفی می‌شود، می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم و بازه‌هایی را که نمودار f' بالای محور طول‌ها یا زیر محور طول‌هاست، تعیین کنیم.
تابع f' در $x = ۱$ صفر است و برای $x < ۱$ ، مقادیر $f'(x)$ مثبت و برای $x > ۱$، مقادیر $f'(x)$ منفی است. بنابراین، تابع f در بازهٔ $(-\infty , ۱]$ صعودی و در بازهٔ $[۱ , +\infty)$ نزولی است. نمودار این تابع نیز این مطلب را نشان می‌دهد.

مثال ۱۲

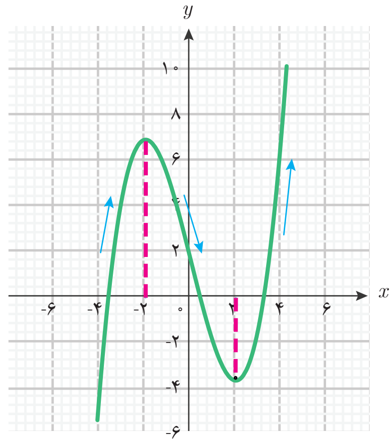
مشتق تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}(x^۳ - ۱۲x + ۵)$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را حساب کنید. مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟ این تابع در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

می‌دانیم $f'(x) = \frac{۱}{۳}(۳x^۲ - ۱۲) = x^۲ - ۴$. برای تشخیص نقاطی که f' به ازای آنها مثبت یا

منفی می‌شود، می‌توانیم نمودار آن را رسم کنیم و بازه‌هایی را که نمودار f' بالای محور طول‌ها (مثبت بودن مشتق) یا زیر محور طول‌ها (منفی بودن مشتق) است، تعیین کنیم. نمودار f' به شکل روبه‌رو است.

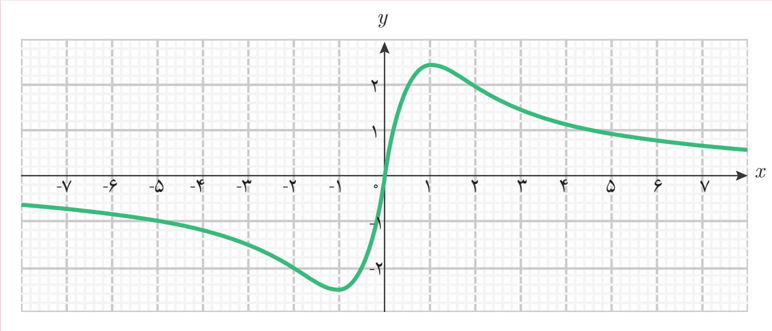


نمودار نشان می‌دهد که f' در بازه‌های $(-\infty , -۲]$ و $[۲ , +\infty)$ مثبت است و تابع f در این بازه‌ها صعودی است. همچنین، f' دربازهٔ $(-۲ , ۲)$ منفی است و تابع f در این بازه نزولی است. نمودار تابع f به شکل زیر است و نتایجی که به‌دست آوردیم در شکل دیده می‌شوند.



کار در کلاس ۳

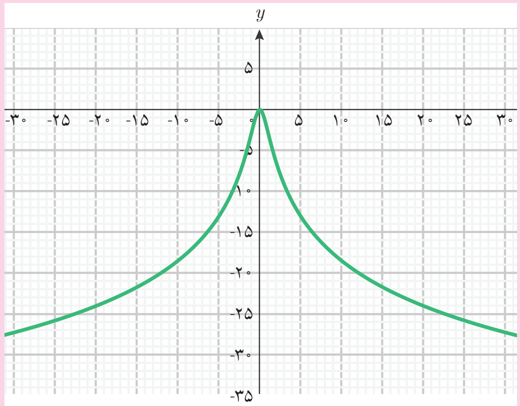
۱ـ فرض کنید g تابعی مشتق‌پذیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ باشد و نمودار g' به شکل زیر باشد.

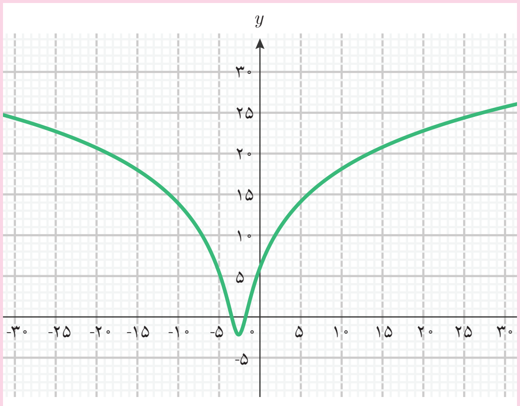


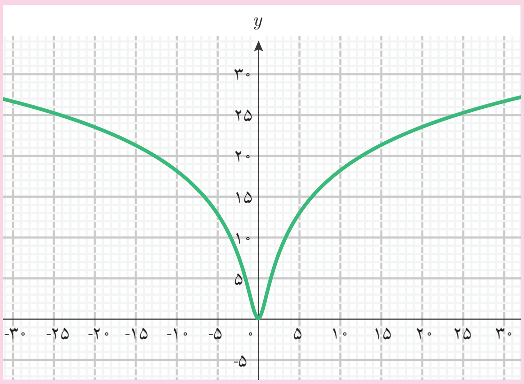
الف) مقادیر g' در چه بازه‌ای مثبت و در چه بازه‌ای منفی است؟

ب) تابع g در کدام بازه‌ها صعودی و در کدام بازه‌ها نزولی است؟

پ) کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار g باشد؟







۲ـ آیا تابعی می‌توان یافت که هم صعودی و هم نزولی باشد؟ مشتق چنین تابعی چه ویژگی دارد؟ با یک مثال نشان دهید.

سعید می‌دانست که در برخی نقاط، مشتق برخی تابع‌ها صفر می‌شود و این سؤال برای او پیش آمد که در این حالت تابع چه وضعیتی پیدا می‌کند.

گفتگو

سعید پرسید: وقتی مشتق یک تابع در بازه‌ای از دامنهٔ تابع مثبت یا منفی باشد، تابع در آن بازه صعودی یا نزولی است. اما، وقتی مشتق تابع در برخی نقاط صفر شود، وضعیت تابع در این نقاط به چه صورت در می‌آید؟

دبیر گفت: به نکتهٔ بسیار خوبی اشاره کردی. وقتی مشتق یک تابع در یک نقطه صفر است، فقط می‌توانیم بگوییم خط مماس بر نمودار تابع در آن نقطه افقی است. برای تشخیص چگونگی رفتار تابع، باید دربارهٔ مثبت یا منفی بودن مشتق تابع در قبل و بعد از آن نقطه تحقیق کنیم.

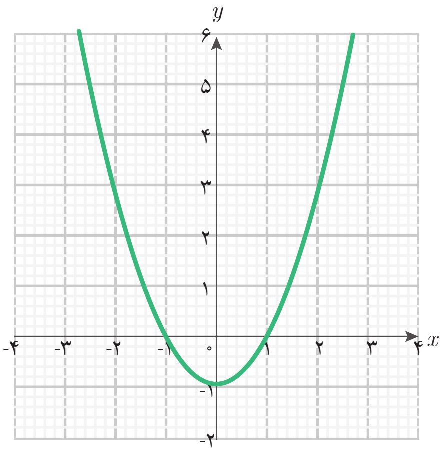
مثال ۱۳

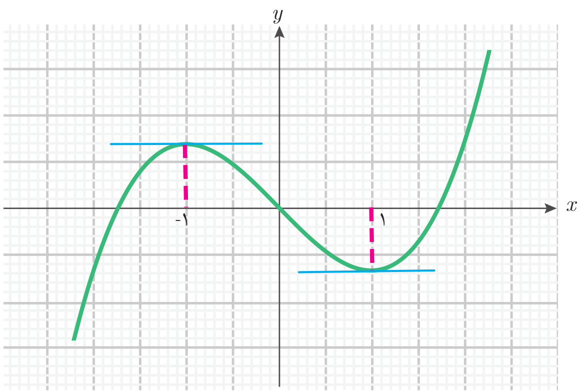
تابع $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مشتق این تابع در چه نقاطی صفر می‌شود؟ وضعیت تابع در این نقاط چگونه است؟

داریم $f'(x)=x^2-1$ و به ازای $x=-1$ و $x=1$ مشتق f صفر می‌شود. با رسم نمودار f' می‌بینیم:

- برای $x<-1$ مقادیر $f'(x)$ مثبت است.
- برای $-1<x<1$ مقادیر $f'(x)$ منفی است.

پس، f در سمت چپ $x=-1$ در حال افزایش و در سمت راست $x=-1$ در حال کاهش است. پس، f در نقطهٔ $x=-1$ به بیشترین مقدار خود می‌رسد. با رسم نمودار f نتایج به‌دست آمده دیده می‌شوند.





همچنین:

- برای $-1<x<1$ مقادیر $f'(x)$ منفی است.

■ برای $x > ۱$ مقادیر $f'(x)$ مثبت است.

پس، f در سمت چپ $x = ۱$ در حال کاهش و در سمت راست $x = ۱$ در حال افزایش است، بنابراین f در نقطهٔ $x = ۱$ به کمترین مقدار خود می‌رسد. این نتیجه در نمودار تابع نیز دیده می‌شود.

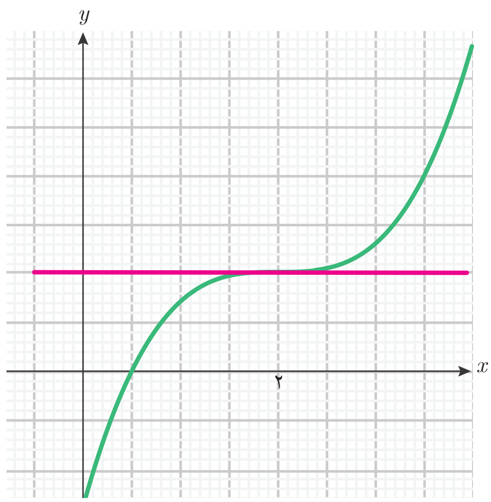
مثال ۱۴

تابع $f(x) = \frac{۱}{۳}(x-۲)^۳$ با دامنهٔ $\mathbb{R}$ را در نظر بگیرید. مشتق این تابع در چه نقاطی صفر می‌شود؟ وضعیت تابع در این نقاط چگونه است؟

داریم $f'(x) = (x-۲)^۲$. بنابراین مقادیر مشتق مثبت هستند و فقط به ازای $x = ۲$ مشتق f صفر می‌شود. بنابراین، در نقاط قبل و بعد از $x = ۲$ مقادیر $f'(x)$ مثبت است.

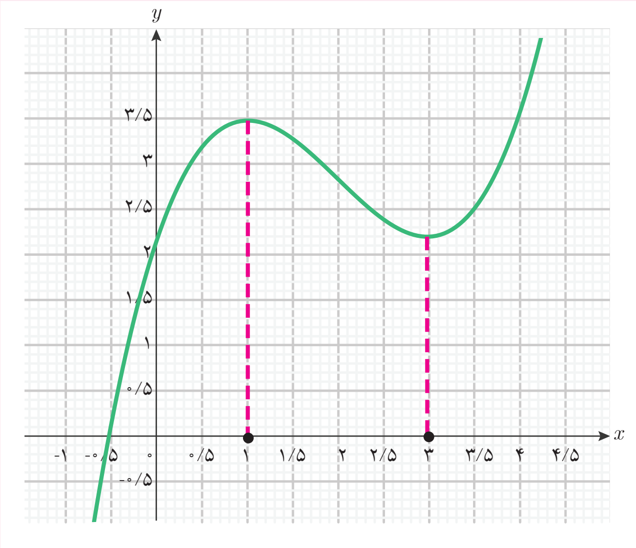
پس، f در سمت چپ و راست $x = ۲$ صعودی است. بنابراین، رفتار صعودی این تابع در نقطهٔ $x = ۲$ تغییری نمی‌کند. این تابع در کل دامنهٔ خود صعودی است.

تنها نکتهٔ مهم در این نقطه آن است که خط مماس بر نمودار این تابع در نقطهٔ $x = ۲$ موازی محور طول‌هاست و نمودار تابع در نقطهٔ اشتراک از میان این خط مماس می‌گذرد. یعنی، نمودار تابع در دو طرف خط مماس قرار می‌گیرد. نمودار این تابع و خط مماس بر آن در نقطهٔ $x = ۲$ به شکل زیر است.

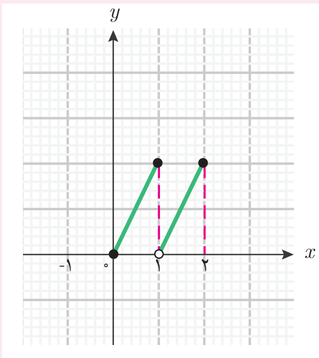


مسائل

۱ نمودار یک تابع به شکل زیر است. این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟



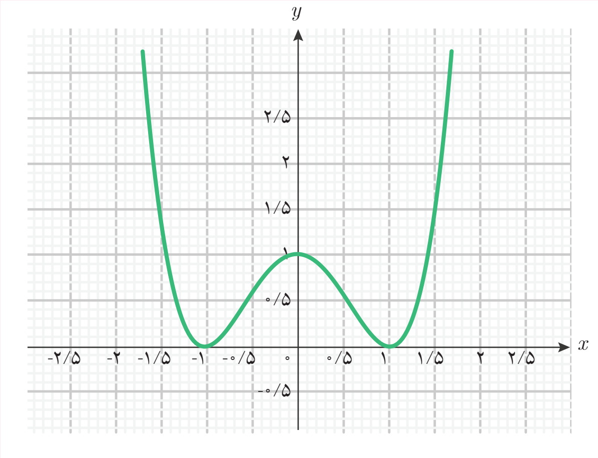
۲ نمودار یک تابع با دامنهٔ [۲ , ۰] به شکل زیر است.



الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی است؟

ب) آیا این تابع در کل دامنهٔ خود صعودی است؟

۳ نمودار یک تابع مشتق‌پذیر به شکل زیر است.



الف) این تابع در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

ب) مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟

پ) مشتق این تابع در چه نقاطی صفر است؟

۴ تابع $g(x)=\dfrac{x}{۲-x}$ با دامنهٔ $\mathbb{R}-\{۲\}$ را در نظر بگیرید.

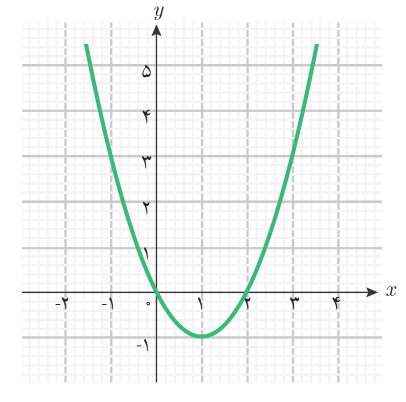
الف) مشتق این تابع را به‌دست آورید.

ب) آیا نقطه‌ای وجود دارد که مشتق این تابع در آن نقطه صفر شود؟

پ) مشتق این تابع در چه نقاطی مثبت و در چه نقاطی منفی است؟

ت) نمودار این تابع را با جئوجبرا رسم کنید و وضعیت صعودی یا نزولی بودن تابع را از روی نمودار و مشتق آن توصیف کنید.

۵ فرض کنید g یک تابع مشتق‌پذیر با دامنهٔ $\mathbb{R}$ است و نمودار g' به شکل روبه‌روست.

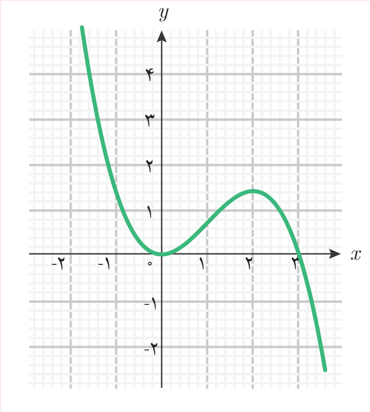


الف) تابع g در چه بازه‌هایی صعودی و در چه بازه‌هایی نزولی است؟

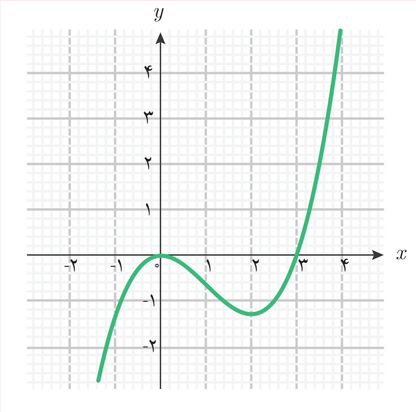
ب) مشتق g در چه نقاطی صفر است؟ آیا تابع g در این نقاط نسبت به نقاط اطراف، به بیشترین یا کمترین مقدار خود می‌رسد؟

پ) کدام‌یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار g باشد؟

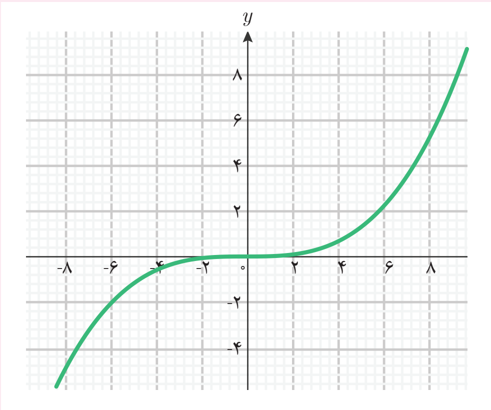
(۱)



(۲)



(۳)



۶ نمودار یک تابع با دامنهٔ [۰ , ۵] را رسم کنید که در بازهٔ [۰,۲] صعودی و در بازهٔ [۲ , ۵] نزولی باشد؟

۷ قانون یک تابع با دامنهٔ [۱ , ۷] را ارائه کنید که پیوسته باشد و در بازهٔ [۱ , ۳] نزولی و در بازهٔ [۳,۷] صعودی باشد.

استانداردهای ارزشیابی پودمان پنجم

عنوان پودمان	تکالیف عملکردی (واحدهای یادگیری)	استاندارد عملکرد (کیفیت)	سطوح انتظارات	شاخص تحقق	نمره
پودمان پنجم: محاسبات مشتق و کاربردها	انجام محاسبات مشتق تابع‌ها با استفاده از قوانین مشتق‌گیری	تفسیر، و حل مسائل مرتبط با تغییرات متغیرها در تابع‌ها	بالاتر از حد انتظار	□ تفسیر، مدل‌سازی و حل مسائل زندگی واقعی (مسائل حل نشده در کلاس و کتاب درسی) مرتبط با تغییرات متغیرها در تابع‌ها	۳
	توصیف و تفسیر رفتار صعودی و نزولی بودن تابع‌ها به کمک مشتق تابع‌ها		حد انتظار	□ تفسیر، و حل مسائل مشابه مسائل حل شده در کلاس و کتاب درسی، مرتبط با تغییرات متغیرها در تابع‌ها	۲
			پایین‌تر از حد انتظار	□ درک و کاربرد صحیح مفاهیم و روابط برای محاسبه مشتق تابع‌ها	۱
نمره مستمر از ۵:					
نمره واحد یادگیری از ۳:					
نمره واحد یادگیری از ۲۰:					

منابع

۱ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ پناهنده، سوسن؛ دهقانی ابیانه، زین‌العابدین و فانی، زیبا. (۱۳۹۵). ریاضی ۱. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۲ اصغری، نسیم؛ بخشعلی‌زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ دهقانی‌ابیانه، زین‌العابدین و میرمعینی، سیدمحمّد. (۱۳۹۶). ریاضی ۲. شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران.
۳ بروجردیان، ناصر. (تابستان ۱۳۹۲). تابع و حد تابع در نگاه جدید و نگاه قدیم. مجله ریاضی پایا، شماره ۲ دوره یکم.
۴ بابلیان، اسماعیل؛ رستمی، محمّدهاشم؛ لآلی، جواد، (۱۳۹۵). ریاضی ۳. شرکت صنایع آموزشی (وابسته به وزارت آموزش و پرورش)
۵ سادات حسینی، سیّد احمد؛ رضوی، سیّد مرتضی. (۱۳۹۵). شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران

۶ Buchanan, Laurie; Fensom Jim; kemp Ed; La Rondie Paul; stevens Jill. Mathematics standard level. oxford. 2012
۷ http://math.missouristate. edu. Time of access: Aug.2017

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت دبیران را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات دبیران دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و دبیران ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

همکاران هنرآموز که در فرایند اعتبارسنجی این کتاب مشارکت نموده‌اند.

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	ابراهیم خطیری	مازندران	۱۵	محمد طالبی، صدیقه گیلانی	خراسان رضوی
۲	ابوذر نخعی مطلق، مصطفی امیدی	سیستان و بلوچستان	۱۶	مهناز پیمان	ایلام
۳	افسانه نژادزاده	خوزستان	۱۷	میکائیل صدقی	اردبیل
۴	اکرم سلامی، نسرین سربخشی	آذربایجان شرقی	۱۸	نرگس رشادتی جونبی	البرز
۵	ایرج پویا	آذربایجان غربی	۱۹	کامران کبیری	چهارمحال‌وبختیاری
۶	بهروز اسکندری	همدان	۲۰	اعظم دهقانی	شهرستان‌های تهران
۷	حجت رنگین، زهرا شمسی گل‌سفیدی	قزوین	۲۱	رباب افشاری	زنجان
۸	حسین باقرزاده	هرمزگان	۲۲	احسان ضیاءالحق، رویا جعفری، مهرناز میراولیایی، محمّدرضا قربانی، رویا رزّاقی، ناهید ابراهیم‌زاده، سعیده خانعلی، مینا غنی‌زاده، افسانه فراهانی، مهدی تیموری، جمیله رضوانی‌نژاد، نگار اسلام‌نژاد، لیلا حقانی، الهام آرمان‌فر، مهدی بهمنی، مریم عزیزی، مهدی یزدان‌مهر	شهر تهران
۹	پیام‌سراجی،فتحعلی‌فنایی‌نجف‌آبادی	اصفهان			
۱۰	حسین ایمانلو	فارس			
۱۱	سینا نعمتی	سمنان			
۱۲	عفت شیخ‌زاده بیدگلی	قم			
۱۳	فرزانه ثنائی‌نژاد	خراسان جنوبی			
۱۴	محسن امیری بیدمشکی	کرمان			